

Εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων – μέτρο διανύσματος- ορθογώνια διανύσματα

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V , στο πεδίο των μιγαδικών αριθμών. Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου είναι τα διανύσματα¹ x που προσδιορίζονται, αν επιλεγεί κάποια βάση, από τις n συντεταγμένες

του x_k , $k = 1, \dots, n$ και γράφονται υπό μορφή πίνακα ως μία στήλη: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Το ανάστροφο του

διανύσματος είναι η σειρά $x^T = [x_1 \quad \dots \quad x_n]$. Το ερμιτιανό ανάστροφο διάνυσμα συμβολίζεται και ως x^+ , δηλαδή $x^+ = (x^T)^*$. Τα διανύσματα στήλες, ακολουθώντας τον Dirac συμβολίζονται και σαν $|x\rangle$, ενώ τα ερμιτιανά ανάστροφα ως $\langle x|$, έτσι ώστε το αντικείμενο $\langle x|x\rangle$, που είναι όπως θα δούμε το Ευκλείδιο μέτρο, να λέγεται μπράκετ που σημαίνει αγγύλη στα αγγλικά.

Έστω ότι έχει επιλεγεί μία βάση στο διανυσματικό χώρο. Η βάση αποτελείται από τα n διανύσματα X^a . Κάθε διάνυσμα X^a παρίσταται από μία στήλη. Τότε κάθε διάνυσμα z στο χώρο μπορεί να

αναλυθεί στη βάση X^a : $z = \sum_{k=1}^n a_k X^k$. Θα μας είναι χρήσιμο αργότερα να παρατηρήσουμε ότι η

σχέση αυτή μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως: $z = Xa$, όπου X ο πίνακας που έχει ως στήλες τα διανύσματα της βάσης: $X = [X^1 \quad \dots \quad X^n]$ και a το διάνυσμα των συντελεστών:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Άσκηση: Επαληθεύστε τη σχέση αυτή.

Για να εισάγουμε την έννοια του μέτρου και της γωνίας μεταξύ διανυσμάτων πρέπει να εφοδιάσουμε τον διανυσματικό χώρο με τη πράξη του εσωτερικού γινομένου.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων x, y ορίζεται ο αριθμός (x, y) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

α) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, για κάθε διάνυσμα x, y, z .

β) $(\lambda x, y) = \lambda^* (x, y)$, για κάθε μιγαδικό αριθμό λ (λ^* ο συζυγής).

γ) $(x, y) = (y, x)^*$

δ) $(x, x) > 0$ εάν $x \neq 0$ (δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο διανύσματος με τον εαυτό του ορίζει θετικό αριθμό).

Άσκηση: Από αυτές τις ιδιότητες αποδείξτε ότι εάν $x=0$, τότε $(x, y)=0$ για κάθε y . Αλλά και αντιστρόφως αν $(x, y)=0$ για κάθε διάνυσμα y τότε θα είναι $x=0$.

Με την εισαγωγή του εσωτερικού γινομένου ο διανυσματικός χώρος γίνεται σαν τον γνωστό χώρο της Ευκλείδειας γεωμετρίας, στον οποίο ορίζονται μεγέθη και γωνίες.

Ορίζουμε το μέτρο ενός διανύσματος, το οποίο συμβολίζουμε $\|x\|$, τον πραγματικό αριθμό το τετράγωνο του οποίου είναι το (x, x) , δηλαδή:

¹ Εδώ με τον όρο διάνυσμα εννοούμε μόνο κάποιο στοιχείο του διανυσματικού χώρου, δεν χρησιμοποιούμε δηλαδή τον φυσικό ορισμό του διανύσματος, δηλαδή φυσικά μεγέθη που μετασχηματίζονται σε στροφές όπως και οι συντεταγμένες.

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Επίσης με την εισαγωγή του εσωτερικού γινομένου εισάγεται και η έννοια της ορθογωνιότητας δύο διανυσμάτων:

δύο διανύσματα x, y είναι ορθογώνια, ως προς το ορισθέν εσωτερικό γινόμενο, αν $(x, y) = 0$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέτρο ικανοποιεί τις εξής θεμελιώδεις ιδιότητες:

α) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, (λ αριθμός, x διάνυσμα).

β) $\|x\| > 0$ εάν $x \neq 0$,

γ) $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$,

δ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Η ανισότητα γ) είναι η γνωστή ανισότητα Cauchy-Schwartz. Η δ) είναι η τριγωνική ανισότητα της γεωμετρίας, η οποία εύκολα προκύπτει από την γ) .

Άσκηση : Δεδομένης της ανισότητας Cauchy-Schwartz αποδείξτε τη τριγωνική ανισότητα.

(Υπόδειξη: αρκεί να παρατηρήσετε ότι $\operatorname{Re}(x, y) \leq |(x, y)|$, Re συμβολίζει το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού).

Άσκηση: Διατυπώστε το πυθαγόρειο θεώρημα που πρέπει να ισχύει σε ένα διανυσματικό χώρο n διαστάσεων, εφοδιασμένο με κάποιο εσωτερικό γινόμενο και αποδείξτε το.

Απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwartz:

Αναλύουμε το διάνυσμα y σε διάνυσμα παράλληλο στο x και στο $z = y - x(y, x) / \|x\|^2$, που είναι κάθετο στο x (δεν χρειάζεται να εξετάσουμε τη περίπτωση $x = 0$ διότι τότε ισχύει η ανισότητα).

Πράγματι $(z, x) = 0$ διότι: $(z, x) = (y, x) - (x, x)(y, x) / \|x\|^2 = (y, x) - (y, x) = 0$. Επειδή $\|z\|^2 \geq 0$ προκύπτει η ανισότητα. Πράγματι:

$(z, z) = (y, y) - (y, x)^2 / \|x\|^2 - (x, y)^2 / \|x\|^2 + (y, x)^2 / \|x\|^2 = (y, y) - |(y, x)|^2 / \|x\|^2 \geq 0$, ο.ε.δ. Από την απόδειξη φαίνεται ότι η ισότητα ισχύει όταν το $z = 0$, δηλαδή όταν τα x και y είναι παράλληλα.

Το εσωτερικό γινόμενο το οποίο θα χρησιμοποιούμε συνήθως είναι το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται ως:

$$(y, x) \equiv y_i^* x_i = y^+ x.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι όλες οι απαιτούμενες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ικανοποιούνται. Έστω τώρα ότι έχουμε επιλέξει μία πλήρη ορθοκανονική βάση διανυσμάτων X^a ,

δηλαδή έχουμε επιλέξει n διανύσματα που ικανοποιούν τις σχέσεις: $X^{a+} X^b = \delta_{ab}$, τότε αν

σχηματίσω, όπως και προηγουμένως, τον πίνακα X που έχει ως στήλες τα διανύσματα της βάσης

$X = \begin{bmatrix} X^1 & \cdots & X^n \end{bmatrix}$, τότε οι σχέσεις ορθοκανονικότητας γράφονται συνοπτικά ως

$X^+ X = I = X X^+$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας, και X^+ ο ερμιτιανός ανάστροφος πίνακας

(δηλαδή $X_{ij}^+ = X_{ji}^*$). Δηλαδή μία ορθοκανονική βάση σχηματίζει έναν ορθογώνιο πίνακα, που έχει

την ιδιότητα ότι $X^{-1} = X^+$.

Θα ορίσουμε στη ανάλυση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης το εσωτερικό γινόμενο

$$(y, x) \equiv y_i^* M_{ij} x_j = y^+ M x,$$

όπου M ένας θετικός πίνακας, δηλαδή ένας πίνακας πραγματικών στοιχείων, που είναι συμμετρικός και έχει την ιδιότητα ότι για όλα τα διανύσματα x , $x_i^* M_{ij} x_j = x^+ M x \geq 0$. Σε αυτό το εσωτερικό γινόμενο έχουμε μία γενικότερη έννοια ορθογωνιότητας από την συνήθη ορθογωνιότητα της

Ευκλείδειας γεωμετρίας, δύο διανύσματα είναι ορθογώνια όταν $y^+ M x = 0$. Αυτό εκφράζεται και με

τη πρόταση ότι τα διανύσματα είναι ορθογώνια ως προς τη μετρική M . Η Ευκλείδεια μετρική

προφανώς προκύπτει όταν η μετρική είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι το $x_i^* M_{ij} x_j$ είναι πραγματικός αριθμός, και ότι αυτό το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις απαιτήσεις ενός εσωτερικού γινομένου.

Αναπαράσταση ενός πίνακα σε μία ορθοκανονική βάση

Έστω ότι έχουμε μία ορθοκανονική βάση x_i , με $i = 1, \dots, n$ και $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$, ως προς κάποιο εσωτερικό γινόμενο. Θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του πίνακα στη βάση αυτή. Επειδή κάθε διάνυσμα προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης το διάνυσμα Ax_i θα μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$Ax_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} x_k.$$

Τα n^2 στοιχεία A_{ki} είναι η αναπράσταση του πίνακα στη βάση x_i . Επειδή όμως η βάση είναι ορθοκανονική έχω ότι

$$A_{ki} = (x_k, Ax_i).$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα συμμετρικού πραγματικού πίνακα

Έστω ένας $(n \times n)$ πίνακας A , που ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό του διανυσματικού χώρου στον εαυτό του. Το διάνυσμα x είναι ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) του A αν

$$Ax = \lambda x.$$

Το λ είναι η ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x . Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα ειδικά διανύσματα που παραμένουν αναλλοίωτα στον μετασχηματισμό. Όταν δηλαδή εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό στα διανύσματα αυτά το αποτέλεσμα είναι κάποιο πολλαπλάσιο διάνυσμα. Ο μετασχηματισμός αφήνει δηλαδή αναλλοίωτο τον μονοδιάστατο υποχώρο που σηματίζει το ιδιοδιάνυσμα, δεν επηρεάζει δηλαδή την ευθεία που σχηματίζεται από το ιδιοδιάνυσμα. Με τον τρόπο αυτό τα ιδιοδιανύσματα με τις αντιστοιχούσες ιδιοτιμές των περιγράφουν τον γραμμικό μετασχηματισμό.

Το πρόβλημα εύρεσης των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων είναι γενικά ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Όταν όμως ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι πίνακας πεπερασμένης διάστασης οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες ενός πολυωνύμου n βαθμού. Οπότε συνυπολογίζοντας και τη πολλαπλότητα των ριζών θα υπάρχουν n ιδιοτιμές. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε ιδιοδιάνυσμα πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Όπου I ο μοναδιαίος πίνακας. Εάν πρόκειται να έχουμε μη τετριμμένη λύση τότε απαιτείται ο πίνακας $A - \lambda I$ να μην είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή για να είναι το x ιδιοδιάνυσμα θα πρέπει η ιδιοτιμή λ να είναι τέτοια ώστε

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

δηλαδή πρέπει να είναι μία εκ των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(A - \lambda I) = 0$, που είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού. Έτσι υπολογίζοντας οι ιδιοτιμές και επιλύοντας τις γραμμικές εξισώσεις $Ax = \lambda x$ για κάθε λ τα ιδιοδιανύσματα.

Γενικά μπορεί να αποδειχθεί ότι αν όλες οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές τότε θα υπάρχουν και n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Πολλές φορές όμως οι ιδιοτιμές έχουν πολλαπλότητα και ο αριθμός των γραμμικών ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων είναι μικρότερος της διάστασης του χώρου. Σε αυτή τη περίπτωση τα πράγματα δυσκολεύουν.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Έστω τα ιδιοδιανύσματα X και Y με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda \neq \mu$, και συνεπώς κάποια ιδιοτιμή είναι διάφορη του μηδενός. Έστω ότι $\mu \neq 0$. Εάν τα X και Y είναι γραμμικά εξαρτημένα θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Εφόσον $Y = \alpha X$, θα είναι $A(Y - \alpha X) = \mu Y - \alpha \lambda X = 0$ ή $Y = \alpha \frac{\lambda}{\mu} X$, και συνεπώς $\frac{\lambda}{\mu} = 1$, που είναι αντίθετο με την υπόθεσή μας.

Αυτές οι δύσκολες περιπτώσεις εκφυλισμού των ιδιοσυναρτήσεων θα μπορούσαμε όμως να υποστηρίξουμε ότι δεν ενδιαφέρουν ενα φυσικό. Ο πίνακας A είναι πίνακας που αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό πρόβλημα και υπάρχει κάποια ανακρίβεια στις τιμές του πίνακα. Αν λάβουμε απειροστά διαφορετικές τιμές στα στοιχεία του πίνακα (διαταράσσοντας τις συμμετρίες αν υπάρχουν) τότε μπορούμε γενικά να υποθέσουμε ότι όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι διαφορετικές και συνεπώς σε αυτές αντιστοιχούν μία πλήρης βάση ιδιοδιανυσμάτων. Χρησιμοποιώντας αυτή τη βάση μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά του φυσικού συστήματος, και στο τέλος να επανέλθουμε στο αρχικό παίρνοντας το όριο των διαταραχών στο μηδέν. Εμείς όμως θα περιορισθούμε σε μία κλάση πινάκων στη οποία δεν εμφανίζονται αυτά τα φαινόμενα, και υπάρχει πάντοτε μία πλήρης βάση ιδιοσυναρτήσεων, έστω και αν οι ιδιοτιμές είναι πολλαπλές. Η κλάση αυτή είναι πίνακες A με πραγματικά στοιχεία οι οποίοι είναι συμμετρικοί, δηλαδή πίνακες που είναι ίσοι με τον ανάστροφο τους: $A = A^T$ (ή με χρήση δεικτών που έχουν την ιδιότητα $A_{lk} = A_{kl}$). Σε πολλά προβλήματα της μηχανικής καθώς και της κβαντικής μηχανικής εμφανίζονται πίνακες τέτοιας μορφής (στη κβαντική μηχανική όλοι οι τελεστές είναι ερμιτιανοί). Οι πίνακες αυτοί έχουν τρεις σημαντικές ιδιότητες:

Α) Έχουν πραγματικές ιδιοτιμές.

Για να αποδείξουμε αυτή τη πρόταση πολλαπλασιάζουμε την $Ax = \lambda x$ με το x^+ , οπότε έχουμε $x^+ Ax = \lambda x^+ x$. Το $x^+ x$ είναι ένας θετικός αριθμός το δε $x^+ Ax$ λόγω της συμμετρίας του A και του πραγματικού των στοιχείων του είναι και αυτό πραγματικό. Πράγματι: $(x^+ Ax)^* = (x_i^* A_{ij} x_j)^* = x_i A_{ji} x_j^* = x_i A_{ji} x_j^* = x^+ Ax$. Συνεπώς η ιδιοτιμή λ που είναι ο λόγος

$$\lambda = \frac{x^+ Ax}{x^+ x},$$

πραγματικών αριθμών είναι και αυτή πραγματική. Επειδή ο πίνακας είναι πραγματικός τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να ληφθούν πραγματικά, διότι άλλως το πραγματικό ή μιγαδικό μέρος του ιδιοδιανύσματος μπορεί να ληφθεί ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ .

Β) Τα ιδιοδιανύσματα τους σχηματίζουν μία ορθοκανονική βάση στο ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα x_1 και x_2 . Θα αποδείξουμε ότι τα δύο αυτά ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή $x_1^+ x_2 = 0$. Πράγματι αφού $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, θα είναι

$$x_2^+ Ax_1 = \lambda_1 x_2^+ x_1 \quad (1)$$

Επειδή $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ θα είναι και $x_2^+ A = \lambda_2 x_2^+$, αφού οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, ο πίνακας A είναι συμμετρικός και με πραγματικά στοιχεία οπότε $A=A^T$ και προφανώς $A^T=A^+$, και επίσης επειδή $(AB)^+ = B^+ A^+$. Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά με τη στήλη x_1 , έχουμε:

$$x_2^+ A x_1 = \lambda_2 x_2^+ x_1 \quad (2)$$

Αφαιρώντας την (1) από την (2) έχουμε:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) x_2^+ x_1 = 0.$$

Που αποδεικνύει, επειδή οι ιδιοτιμές έχουν υποτεθεί διαφορετικές, ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Ταυτοχρόνως αποδείξαμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση : Χρησιμοποιώντας δείκτες αποδείξτε ότι $(AB)^+ = B^+ A^+$. Επαναλάβετε τη παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιώντας δείκτες.

Συνεπώς αν όλες οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές τότε αναγκαστικά τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές σχηματίζουν μία πλήρη ορθοκανονική βάση. Αυτό το συμπέρασμα βασίζεται στο ότι υπάρχουν n διαφορετικές ιδιοτιμές.

Για να βρούμε πόσες ιδιοτιμές έχουμε πρέπει να δούμε πως υπολογίζονται οι ιδιοτιμές. Αυτό είναι γενικά ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Στην περίπτωση που ο A είναι ένας πεπερασμένης διάστασης πίνακας το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ριζών ενός πολυωνύμου βαθμού n (δεν λέμε ότι αυτό είναι απλό πρόβλημα). Συνεπώς επειδή κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες (υπολογίζοντας και τη πολλαπλότητα των ριζών) θα υπάρχουν και n ιδιοτιμές. ιδιοδιανύσματα πρέπει να ικανοποιούν τις n εξισώσεις:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Παραμένει να ασχοληθούμε με τη περίπτωση πολλαπλών ιδιοτιμών. Π.χ. ο μοναδιαίος πίνακας στις δύο διαστάσεις έχει δύο ίσες με το 1 ιδιοτιμές, και ως ιδιοδιανύσματα όλα τα διανύσματα του χώρου. Επειδή ο χώρος που σχηματίζουν τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα είναι ίσος με τη πολλαπλότητα της ιδιοτιμής, μπορούμε να επιλέξουμε από όλα τα διανύσματα του χώρου δύο κάθετα ιδιοδιανύσματα και να τα χρησιμοποιήσουμε ως ορθογώνια βάση.

Αυτό συμβαίνει γενικότερα όταν έχουμε πολλαπλές ιδιοτιμές. Έστω λ.χ. ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα x_1 και x_2 έχουν την ίδια ιδιοτιμή λ , τότε και κάθε γραμμικός

συνδυασμός $ax_1 + bx_2$ είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ , οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε δύο διανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους που έχουν την ιδιοτιμή λ . Πράγματι εάν τα x_1 και x_2 δεν είναι ορθογώνια θεωρώ τα διανύσματα

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2 + ay_1$$

τα οποία είναι ιδιοδιανύσματα του A με ιδιοτιμή λ και επιλέγω το a ώστε $y_2^+ y_1 = 0$, δηλαδή

$$a = -\frac{x_1^+ x_2}{\|x_1\|^2}.$$

Με τον τρόπο αυτό κατασκεύασα δύο ιδιοδιανύσματα y_1, y_2 που έχουν ιδιοτιμή λ και είναι ορθογώνια. Εάν υπήρχε και τρίτο γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα x_3 που είχε ιδιοτιμή λ , τότε θα κατασκεύαζα το διάνυσμα

$$y_3 = x_3 + by_1 + cy_2$$

έτσι ώστε να είναι κάθετο στα προηγούμενα ιδιοδιανύσματα y_1, y_2 . Αυτή η διαδικασία, γνωστή ως διαδικασία ορθογωνιοποίησης Gram-Schmidt, μπορεί προφανώς να επεκταθεί σε οποιοδήποτε αριθμό ιδιοδιανυσμάτων που έχουν την ίδια ιδιοτιμή. Εάν δε ο αριθμός των γραμμικά ανεξαρτητών ιδιοδιανυσμάτων που έχουν την ίδια ιδιοτιμή είναι ίσος με τη πολλαπλότητα της ιδιοτιμής, τότε μπορεί να κατασκευασθεί μία πλήρης ορθογώνια βάση. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση τα ιδιοδιανύσματα ενός συμμετρικού γραμμικού μετασχηματισμού μπορούν να ληφθούν ως ορθοκανονικά.

Γ) Κάθε ιδιοτιμή πολλαπλότητας m έχει m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα²

Αν αποδειχθεί αυτή η πρόταση έχει ολοκληρωθεί η περιγραφή των ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοτιμών των συμμετρικών πινάκων διότι όπως είδαμε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία πλήρη ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Έστω ότι υπάρχουν μόνο r γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ με $r < m$. Αυτά τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να ληφθούν χωρίς έλλειψη της γενικότητας ως ορθοκανονικά, διότι άλλως θα μπορούσα με τη διαδικασία Gram-Schmidt να κατασκευάσω r ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα. Ονομάζω αυτά τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα

$$e_1, e_2, \dots, e_r$$

Ο υποχώρος που σχηματίζουν αυτά τα ιδιοδιανύσματα έχει διάσταση r . Χρειάζονται άλλα $n - r$ διανύσματα για κατασκευασθεί μία πλήρης βάση. Κατασκευάζω με τη διαδικασία Gram-Schmidt $n - r$ ορθοκανονικά διανύσματα f_i έτσι ώστε η e_i βάση να επεκταθεί σε πλήρη βάση του χώρου. Κατασκευάζω έτσι μία ορθοκανονική βάση

$$e_1, e_2, \dots, e_r, f_1, f_2, \dots, f_{n-r}.$$

Προσέξτε ότι ενώ τα e_i είναι ιδιοδιανύσματα τα f_i δεν είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα. Ποία μορφή παίρνει ο πίνακας σε αυτή τη βάση; Επειδή τα e_i είναι ιδιοδιανύσματα και είναι ορθοκανονικά

$$(e_i, Ae_j) = \lambda(e_i, e_j) = \lambda\delta_{ij}.$$

Δηλαδή ο υποπίνακας A_{ij} με $1 \leq i, j \leq r$ είναι διαγώνιος με στοιχεία στη διαγώνιο την ιδιοτιμή λ .

Ομοίως τα στοιχεία του πίνακα A_{ij} με $1 \leq i \leq r$ και $r + 1 \leq j \leq n$ είναι τα

$$(e_i, Af_{j-r}) = e_i^T Af_{j-r} = \lambda e_i^T f_{j-r} = 0,$$

καθώς μηδενικά είναι τα στοιχεία του πίνακα A_{ij} με $r + 1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq r$. Οπότε ο πίνακας A έχει την εξής μορφή σε αυτή τη βάση:

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0^T & S \end{pmatrix},$$

όπου $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ο διαγώνιος $r \times r$ πίνακας, ο 0 ο μηδενικός $r \times (n - r)$ πίνακας, και

S ένας πίνακας $(n - r) \times (n - r)$. Προκύπτει όμως επειδή ότι ο S έχει πραγματικά στοιχεία και είναι ένας συμμετρικός πίνακας. Διότι το στοιχείο του

$$S_{ij} = f_i^T Af_j = f_i^T A^T f_j = (Af_i)^T f_j = f_j^T Af_i = S_{ji}.$$

Επειδή σε αυτή την αναπράσταση $\det A = \det \Lambda \det S$ η χαρακτηριστική εξίσωση ως προς τις ιδιοτιμές μ είναι

$$\det(A - \mu I) = (\lambda - \mu)^r \det(S - \mu I) = 0.$$

Επειδή όμως έχουμε υποθέσει ότι η λ είναι ιδιοτιμή με πολλαπλότητα $m > r$ θα πρέπει η λ θα πρέπει να είναι και ιδιοτιμή του συμμετρικού πίνακα S . Συνεπώς S θα έχει κάποιο ιδιοδιάνυσμα x με ιδιοτιμή λ που είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα e_i . Αυτό όμως είναι άτοπο διότι αρχικά είχαμε υποθέσει ότι τα e_i καλύπτουν τον χώρο των ιδιοδιανυσμάτων με ιδιοτιμή λ . Συνεπώς κάθε συμμετρικός πίνακας όταν έχει ιδιοτιμή πολλαπλότητας m έχει και m ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα.

² Η απόδειξη αυτή είναι σχετικά δύσκολη, γράφεται για λόγους πληρότητας. Παραταύτα είναι χρήσιμη διότι γίνεται αντιληπτή η μέθοδος διαγωνιοποίησης καθώς και η σημασία της υπόθεσης ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός.