

ΠΟΤΕ ΙΣΧΥΕΙ Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΕΩΣ

Είδαμε ότι η φυσική κίνηση ενός σωματιδίου σε συντηρητικό πεδίο ικανοποιεί την αρχή ελάχιστης δράσης του Hamilton με Λαγκρανζιανή $L = T - V$, όπου T η κινητική ενέργεια του σωματιδίου και V η δυναμική του ενέργεια. Σε αυτήν την περίπτωση οι νόμοι του Νεύτωνα (εδώ βεβαίως αναφερόμαστε μόνο στους δύο πρώτους νόμους) είναι ισοδύναμοι με την αρχή του Hamilton. Οι νόμοι του Νεύτωνα όμως είναι γενικότεροι από την αρχή του Hamilton, δηλαδή για ένα οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα δεν υπάρχει κατ' ανάγκη Λαγκρανζιανή συνάρτηση η οποία μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange να οδηγεί στις εξισώσεις κίνησης του συστήματος. Για παράδειγμα, σε συστήματα στα οποία υπάρχει ανάλωση ενέργειας ή τριβή, μπορεί να μην είναι εφικτή η κατασκευή Λαγκρανζιανής συνάρτησης η οποία να περιγράφει το σύστημα.

Άσκηση: Η Λαγκρανζιανή $L(x, \dot{x}, t) = e^{\eta} (\dot{x}^2 - x^2)$ περιγράφει κάποιο γνωστό σας φυσικό σύστημα; Πρόκειται για κίνηση σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων;

Επίσης δεν μπορούμε με την αρχή του Hamilton να πραγματευτούμε την κίνηση σε μη συντηρητικά πεδία. Αυτό όμως δεν αποτελεί πρόβλημα διότι τα θεμελιώδη πεδία δυνάμεων τα οποία γνωρίζουμε είναι όλα συντηρητικά. Εάν το δυναμικό εξαρτάται από τις ταχύτητες, οπότε οι δυναμικοί νόμοι δεν είναι αναλλοίωτοι στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, η φυσική κίνηση δεν απορρέει κατ' ανάγκη από την αρχή του Hamilton. Τέτοια πεδία παρουσιάζονται για παράδειγμα στον ηλεκτρομαγνητισμό, αλλά ειδικά σε αυτή την περίπτωση θα δείξουμε ότι για την κίνηση φορτίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο υπάρχει Λαγκρανζιανή συνάρτηση, και η κίνηση απορρέει από την αρχή του Hamilton.

Παρότι, λοιπόν, οι νόμοι του Νεύτωνα είναι γενικότεροι από την αρχή της ελάχιστης δράσης του Hamilton, η αρχή του Hamilton μας δίνει τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε βαθύτερα τους νόμους της μηχανικής, να καταλάβουμε πώς παράγονται οι διατηρήσιμες ποσότητες, και να διαμορφώσουμε ένα πλαίσιο με το οποίο να μπορούμε να πραγματευτούμε τις νεώτερες θεωρίες της Φυσικής. Επί πλέον, όπως είδαμε ήδη στην περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου, η Λαγκρανζιανή μπορεί να βρεθεί με τη χρήση γενικών επιχειρημάτων που βασίζονται στις συμμετρίες του φυσικού συστήματος. Η Λαγκρανζιανή θεώρηση θα μας δώσει τη δυνατότητα να προβλέπουμε τις εξισώσεις κίνησης όταν αυτές δεν είναι γνωστές, και βασισμένοι στο παράδειγμα της Νευτώνειας Μηχανικής να οικοδομούμε φυσικές θεωρίες για φαινόμενα για τα οποία οι νόμοι μας είναι άγνωστοι. Η δράση σε αυτή τη θεώρηση προκύπτει ως μια ποσότητα εξέχουσας φυσικής σημασίας. Θα δούμε ότι μέσω της δράσης μπορεί να θεμελιωθεί η κβαντομηχανική με ένα ιδιαίτερα διαισθητικό και πρωτότυπο τρόπο με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων διαδρομής (path integrals) που εισήγαγαν οι Dirac και Feynman.

Άσκηση: Να βρεθεί η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την κίνηση σωματιδίου μάζας m , υπό την επενέργεια δύο δυνάμεων, της $\vec{F}(t)$ και της δύναμης που προέρχεται από δυναμικό της μορφής $V = \frac{k}{2} |\dot{x}|^2$.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΠΟ ΣΥΝΔΕΣΜΟΥΣ

Εκτός από τον περιορισμό κατασκευής Λαγκρανζιανής στην περίπτωση συντηρητικών μόνο πεδίων, υπάρχει προβληματισμός όσον αφορά την ύπαρξη Λαγκρανζιανής για μηχανικά συστήματα που υπόκεινται σε κάποιον περιορισμό όσον αφορά την κίνησή τους. Οι περιορισμοί αυτοί ονομάζονται γενικότερα *σύνδεσμοι*. Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός σωματιδίου το οποίο βρίσκεται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας αλλά είναι δεσμευμένο να κινείται επάνω στο οριζόντιο επίπεδο $z = 0$. Από τους νόμους του Νεύτωνα ξέρουμε ότι το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη, ομαλή κίνηση στο επίπεδο $z = 0$ και του ασκείται μια δύναμη ίση και αντίθετη με τη δύναμη της βαρύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Αν δεν υπήρχε κανένας περιορισμός στην κίνηση του σωματιδίου η Λαγκρανζιανή του θα ήταν:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Θα δείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη Λαγκρανζιανή την *εξίσωση του συνδέσμου* $z = 0$ περιγράφει σωστά την κίνηση του σωματιδίου. Προκειμένου να μετατρέψουμε το σύστημα μας σε ένα σύστημα που περιγράφεται από ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων και να το απαλλάξουμε από τους περιορισμούς των συνδέσμων που μας προκαλούν αμηχανία ως προς την αντιμετώπισή τους ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται ταυτόχρονα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο και σε ένα επιπλέον πεδίο με δυναμικό

$$V^k(z) = \frac{1}{2}kz^2 \quad (\text{το δυναμικό ενός ελατηρίου σκληρότητας } k \text{ που στο φυσικό του}$$

μήκος φθάνει μέχρι το $z = 0$). Ίσως πείτε ότι το καινούργιο σύστημα δεν έχει καμία σχέση με το αρχικό! Σκεφθείτε όμως τι συμβαίνει αν πάρουμε το όριο $k \rightarrow \infty$. Η καινούργια Λαγκρανζιανή $L' = L - V^k(z)$ περιγράφει ένα σωματίδιο που κινείται στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης αλλά επιπλέον κάποιο πολύ σκληρό ελατήριο δεν του επιτρέπει να απομακρυνθεί πολύ από το επίπεδο $z = 0$. Όντας ένα μηχανικό σύστημα με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές (x, y, z) οδηγεί σε τρεις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} + mg + kz = 0$$

Η τρίτη εξίσωση έχει ως λύση την $z = A \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - \frac{mg}{k}$, στην οποία αν επιβάλλουμε αρχικές συνθήκες $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ (συμβιβαστές με τον σύνδεσμο

$z = 0$) καταλήγουμε στη λύση $z = \frac{mg}{k} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - 1 \right)$, η οποία εμφανώς οδηγεί

στην αναμενόμενη λύση $z = 0$, στο όριο $k \rightarrow \infty$. Ουσιαστικά, επιστρέψαμε στο αρχικό πρόβλημα της δεσμευμένης κίνησης του σωματιδίου. Οι υπόλοιπες εξισώσεις είναι αυτές που θα παίρναμε αν θέταμε εξ αρχής στη Λαγκρανζιανή L του συστήματος άνευ συνδέσμου, την εξίσωση συνδέσμου $z = 0$. Το ενδιαφέρον είναι ότι στη λύση του προβλήματος ουδεμία αναφορά γίνεται στην αντίδραση του επιπέδου!

Μπορεί όμως κανείς να υπολογίσει και την αντίδραση του συνδέσμου $F = -\frac{\partial V^k}{\partial z} \Big|_{z=0}$:

Από την εξίσωση Euler-Lagrange για τη νέα Λαγκρανζιανή L' έχουμε

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} + \frac{\partial V^k}{\partial z} \Rightarrow F = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Στο πρόβλημά μας, η δύναμη καταλήγει να είναι $F = m\ddot{z} + mg = mg \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right)$.

Στο όριο $k \rightarrow \infty$, ο δεύτερος όρος ταλαντώνεται τόσο γρήγορα ώστε να έχει νόημα μόνο η μέση τιμή αυτού, η οποία είναι μηδέν. Επομένως $F = mg$, όπως άλλωστε περιμέναμε. Μπορεί λοιπόν να χρησιμοποιήσει κανείς την παραπάνω σχέση για να υπολογίσει την αντίδραση των συνδέσμων.

Άσκηση: Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες. Υποθέστε στη συνέχεια πως θέλετε να επιβάλετε τη δέσμευση να κινείται το σωματίδιο σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας a . Επιλέξτε ένα κατάλληλο δυναμικό που να εξαναγκάζει το σωματίδιο να κινείται ακτινικά σύμφωνα με την εξίσωση $r = a$. Γράψτε την καινούργια Λαγκρανζιανή L' που προκύπτει ύστερα από την πρόσθεση του καινούργιου δυναμικού και λύστε την γωνιακή εξίσωση Euler-Lagrange που προκύπτει αν στο τέλος αντικαταστήσετε την ακτινική λύση $r = a$. Υπολογίστε την ακτινική αντίδραση της στεφάνης. [Λύση:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), V^k(r) = \frac{1}{2} k(r - a)^2, L' = L - V^k(r), \dot{\theta} = \text{σταθ}, F_r = -m a \dot{\theta}^2]$$

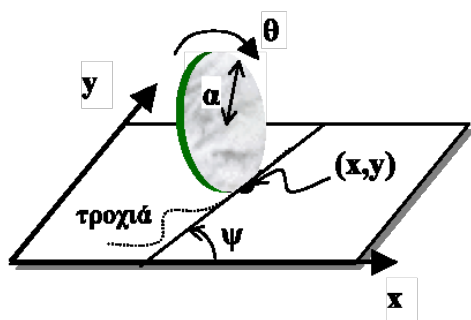
Δείξαμε λοιπόν ότι αν η κίνηση ενός μηχανικού συστήματος περιορίζεται από δεσμούς τότε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει τη κίνηση είναι η διαφορά κινητικής και δυναμικής ενέργειας, όπου οι ενέργειες αυτές έχουν υπολογισθεί λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς. Η κίνηση προκύπτει από τις εξισώσεις Euler-Lagrange χωρίς να χρειάζεται να υπολογισθούν οι αντιδράσεις.

ΟΛΟΝΟΜΟΙ ΚΑΙ ΜΗ ΟΛΟΝΟΜΟΙ ΔΕΣΜΟΙ

Δείξαμε ότι εάν η κίνηση του σωματιδίου περιορίζεται μέσω κάποιας συναρτησιακής σχέσης μεταξύ των συντεταγμένων που ορίζουν τη θέση του στο χώρο, τότε η φυσική κίνηση μπορεί να βρεθεί από τη Λαγκρανζιανή $L = T - V$, όπου η κινητική και δυναμική ενέργεια εκφράζονται ως συνάρτηση των ελευθέρων συντεταγμένων του συστήματος, στις οποίες έχουν ληφθεί υπόψη οι περιορισμοί. Οι περιορισμοί της μορφής $f(q_i, t) = 0$, όπου f κάποια συνάρτηση των συντεταγμένων q_i και ίσως και του χρόνου, λέγονται *ολόνομοι δεσμοί*. Ο αριθμός των συντεταγμένων που χρειάζονται για να προσδιοριστεί η θέση του συστήματος αφού έχουν ληφθεί υπόψη οι περιορισμοί της κίνησης λέγονται βαθμοί ελευθερίας του φυσικού συστήματος. Π.χ. ένα ελεύθερο σωματίδιο στο χώρο έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, αλλά όταν υπόκειται στο δεσμό $r = a + ct$, με a, c σταθερές, δηλαδή όταν περιορίζεται να κινείται σε μία σφαίρα μεταβλητής ακτίνας τότε το σωματίδιο αυτό έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, την πολική γωνία και την αζιμουθιακή γωνία που προσδιορίζουν τη θέση πάνω στη σφαιρική επιφάνεια.

Υπάρχουν όμως και δεσμοί οι οποίοι δεν μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή $f(q_i, t) = 0$, π.χ. αν ένα σωματίδιο κινείται στη περιοχή $z > 0$. Αυτοί οι δεσμοί

λέγονται *μη ολόνομοι*. Ένα άλλο παράδειγμα μη ολόνομου δεσμού είναι όταν υπάρχει τέτοια δεσμεύση των ταχυτήτων ώστε να μην μπορούν να ολοκληρωθούν οι δεσμοί για να προσδιορίσουν μια ολοκληρωτική σχέση μεταξύ των συντεταγμένων. Το πλέον γνωστό παράδειγμα μη ολόνομου δεσμού είναι η κίνηση ενός νομίσματος σε επίπεδο δάπεδο. Ας θεωρήσουμε ότι το νόμισμα παραμένει όρθιο και ότι κυλιέται επί της επιφανείας χωρίς να ολισθαίνει (η παραδοχή ότι το νόμισμα παραμένει όρθο είναι προβληματική διότι εάν το νόμισμα εκτελεί καμπύλη κίνηση τότε για να



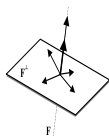
ισορροπήσει, θα πρέπει το επίπεδο του νομίσματος να μην είναι κατακόρυφο, όπως συμβαίνει με το μοτοσικλετιστή όταν στρίβει –το συμπέρασμα όμως για το χαρακτήρα του δεσμού δεν αλλάζει). Η θέση του νομίσματος προσδιορίζεται γενικά από το σημείο επαφής με το δάπεδο (x, y) , τη γωνία ψ που σχηματίζει το επίπεδο του νομίσματος με τον άξονα x , και την γωνία κύλισης θ περί τον άξονα τον

κάθετο στο επίπεδο του νομίσματος. Από τις 4 συντεταγμένες (x, y, ψ, θ) που χρειάζονται για τον προσδιορισμό της θέσης του νομίσματος μόνο δύο είναι πραγματικά ανεξάρτητες. Η συνθήκη ότι το νόμισμα δεν ολισθαίνει συνεπάγεται τις δύο σχέσεις: $dx = a(\cos \psi)d\theta$ και $dy = a(\sin \psi)d\theta$. Είναι δυνατόν να ολοκληρώσουμε αυτές τις σχέσεις ώστε να εκφράσουμε δύο οποιεσδήποτε συντεταγμένες συναρτήσει των άλλων; Θα αποδείξουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν. Έστω ότι υπήρχαν συναρτήσεις g, h ώστε $\psi = g(x, y)$ και $\theta = h(x, y)$. Δεν είναι δυνατόν όμως να υπάρξει τέτοια g συνάρτηση, διότι για κάθε σημείο επαφής μπορώ να στρέψω το επίπεδο του νομίσματος σε οποιαδήποτε γωνία ψ και έτσι δεν είναι δυνατόν η γωνία ψ να είναι συνάρτηση των x, y . Ούτε και τέτοια h συνάρτηση μπορεί να υπάρχει: Θεωρήστε την κίνηση του νομίσματος στο επίπεδο $\psi = \psi_0$, έστω ότι αρχικά $\theta = 0$. Κυλήστε το νόμισμα κατά γωνία θ_0 , σταματήστε, στρέψτε το νόμισμα γύρω από την κατακόρυφη διάμετρό του κατά 180° , και επιστρέψτε στην αρχική θέση του νομίσματος, στο αρχικό σημείο x, y . Το νόμισμα θα έχει στραφεί κατά γωνία $-2\theta_0$, και έτσι στο ίδιο σημείο x, y θα αντιστοιχούν δύο γωνίες θ , 0 και $-2\theta_0$. Συνεπώς δεν είναι δυνατόν η h να είναι συνάρτηση των x, y .

Ενώ για ολόνομους δεσμούς η φυσική κίνηση μπορεί να προκύψει, όπως είδαμε από την αρχή του Hamilton, αυτό δεν συμβαίνει αναγκαστικά στην περίπτωση των μη ολόνομων δεσμών.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE

Γνωρίζουμε ότι το ακρότατο $\vec{x}_0$ μιας συνάρτησης $h(\vec{x})$, όπου το $\vec{x}$ ανήκει στο $\mathbb{R}^n$, ικανοποιεί την σχέση $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0$. Για να προσδιορίσω το ακρότατο $\vec{x}_0$ της $h(\vec{x})$ όταν ισχύει ο περιορισμός $g(\vec{x}) = 0$, εργάζομαι ως εξής: για να είναι το $\vec{x}_0$ ακρότατο της $h(\vec{x})$ πρέπει για κάθε $|\vec{\eta}| \ll 1$ να έχω $\left(\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{n} \right) = 0$ όπου



$$\left(\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}, \vec{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \eta_i, \quad \text{το εσωτερικό}$$

$$\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

$$\vec{n}$$

γινόμενο των δύο διανυσμάτων. Στην περίπτωση μας το $\vec{\eta}$ δεν είναι τυχαίο διάνυσμα, αλλά πρέπει να ικανοποιεί τον περιορισμό $g(\vec{x}_0 + \vec{\eta}) = 0$, να ικανοποιεί

δηλαδή την συνθήκη $\left(\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta} \right) = 0$. Άρα

πρέπει το ακρότατο $\vec{x}_0$ να ικανοποιεί την

$\left(\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{n} \right) = 0$ για εκείνα τα $\vec{\eta}$ που ικανοποιούν την $\left(\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{\eta} \right) = 0$. Δηλαδή θα πρέπει το διάνυσμα $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0}$ να είναι κάθετο στο $\vec{\eta}$, για κάθε $\vec{\eta}$ κάθετο στο $\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}$, άρα πρέπει τα $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0}$ και $\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}$ να είναι παράλληλα και να υπάρχει αριθμός λ ώστε $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0} = -\lambda \vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}$ ¹. Συνεπώς για να προσδιορίσω το ακρότατο της $h(\vec{x})$ υπό την συνθήκη $g(\vec{x}) = 0$, προσδιορίζω το ακρότατο $\vec{x}_0(\lambda)$ της $h + \lambda g$, δηλαδή το $\vec{x}_0(\lambda)$ που ικανοποιεί την σχέση $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0} + \lambda \vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0} = 0$, και έπειτα προσδιορίζω το λ ούτως ώστε $g(\vec{x}_0(\lambda)) = 0$. Η μέθοδος αυτή πρωτοεφαρμόστηκε από τον Lagrange, και το λ λέγεται πολλαπλασιαστής του Lagrange.

Η μέθοδος αυτή γενικεύεται εύκολα όταν υπάρχουν περισσότεροι περιορισμοί. Υποθέστε για παράδειγμα ότι θέλω το ακρότατο της $h(\vec{x})$ υπό τις συνθήκες $g(\vec{x}) = 0$ και $f(\vec{x}) = 0$. Τότε, όπως και προηγουμένως πρέπει για $|\vec{\eta}| < 1$ να έχω:

$\left(\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{n} \right) = 0$ και τα $\vec{\eta}$ θα πρέπει να ανήκουν στο γραμμικό χώρο $F^\perp$ που είναι

κάθετος στο γραμμικό χώρο F , ο οποίος σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}$ και

$\vec{\nabla} f \Big|_{\vec{x}_0}$ επειδή $\left(\vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{n} \right) = 0$ και $\left(\vec{\nabla} f \Big|_{\vec{x}_0}, \vec{n} \right) = 0$. Δηλαδή το διάνυσμα $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0}$ πρέπει

να ανήκει στο γραμμικό χώρο που είναι κάθετος στο χώρο που ανήκει το $\vec{\eta}$, δηλαδή πρέπει να ανήκει στον κάθετο χώρο του $F^\perp$ που δεν είναι άλλος από τον ίδιο τον F .

Δηλαδή υπάρχουν πολλαπλασιαστές λ και μ ώστε $\vec{\nabla} h \Big|_{\vec{x}_0} + \lambda \vec{\nabla} g \Big|_{\vec{x}_0} + \mu \vec{\nabla} f \Big|_{\vec{x}_0} = 0$ και το ακρότατο προσδιορίζεται από αυτή τη σχέση ενώ οι τιμές των πολλαπλασιαστών προσδιορίζονται ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί.

Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να γενικευθεί και σε άλλους γραμμικούς χώρους, όπως για παράδειγμα σε αυτόν των συνεχών συναρτήσεων σε κάποιο διάστημα $[t_1, t_2]$, ο οποίος μπορεί να εφοδιασθεί με το ακόλουθο εσωτερικό

¹ Υποθέτουμε εδώ ότι η βαθμίδα της g δεν μηδενίζεται στο ακρότατο. Όταν αυτό συμβαίνει ο πολλαπλασιαστής τοποθετείται στο h . Ένα απλό παράδειγμα είναι το $h = x$ και $g = y^3 - x^2$. Η h έχει ελάχιστο στο $(x, y) = (0, 0)$, υπό την συνθήκη ότι ικανοποιείται η $g = 0$, παρότι στο σημείο

αυτό $\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0$. Για πληρέστερη παρουσίαση του θέματος ιδέ Courant and Hilbert (1966, Κεφ. 4).

γινόμενο: $(f, \eta) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\eta(t)dt$ (σχηματίζοντας έτσι ένα χώρο Hilbert). Έτσι εάν $(f, \eta) = 0$ για όλα τα η που ικανοποιούν τις συνθήκες $(b, \eta) = 0$ και $(c, \eta) = 0$ τότε όπως και προηγουμένως η f πρέπει να είναι γραμμικός συνδυασμός των b και c .

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να προσδιορισθεί το σχήμα που πρέπει να έχει ένα συνεχές πλανητοειδές σταθερής πυκνότητας ρ και ολικής μάζας M ώστε η βαρυτική έλξη σε ένα σημείο της επιφάνειάς του κατά τη διεύθυνση της κάθετου να είναι μέγιστη.

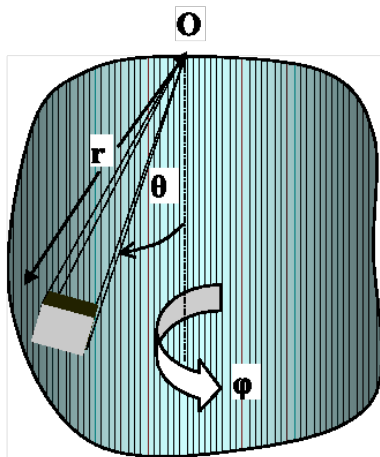
Εάν η απόσταση της επιφάνειας από το σημείο O είναι $R(\theta, \phi)$, όπου θ η πολική γωνία που σχηματίζεται με την κάθετο στην επιφάνεια στο O , και ϕ η αζιμουθιακή γωνία τότε η μάζα του πλανητοειδούς δίνεται από την παρακάτω έκφραση που είναι ένα συναρτησοειδές της $R(\theta, \phi)$:

$$M[R] = \rho \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(\theta, \phi)} dr r^2 = \frac{\rho}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi R^3(\theta, \phi).$$

Η βαρυτική έλξη κατά την κάθετη διεύθυνση είναι:

$$g[R] = \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(\theta, \phi)} dr r^2 \left(\frac{G\rho \cos \theta}{r^2} \right) = G\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi R(\theta, \phi).$$

Θεωρήσαμε ότι η επιφάνεια ορίζεται για γωνίες $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (διότι εάν η



επιφάνεια εκτεινόταν και σε $\theta > \pi/2$ το πεδίο που θα δημιουργούνταν στο O θα ήταν μικρότερο από εκείνο ενός πλανητοειδούς που έχει το ίδιο σχήμα για $\theta \leq \pi/2$, ενώ όλη η μάζα που προηγουμένως εκτεινόταν σε $\theta > \pi/2$ απομακρυνόταν σε άπειρη απόσταση). Επίσης, ενώ αναμένουμε ότι για λόγους συμμετρίας η ζητούμενη επιφάνεια θα είναι συμμετρική ως προς την κάθετο στο O , δεν έχουμε εκ προοιμίου εισαγάγει μια τέτοια παραδοχή. Το πρόβλημα, λοιπόν, είναι να βρεθεί η $R(\theta, \phi)$ που μεγιστοποιεί την $g[R]$ υπό τη συνθήκη $M[R] = M$.

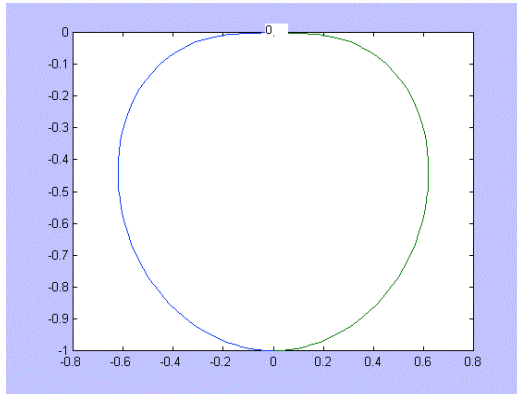
Εάν θεωρήσουμε ότι έχει βρεθεί η επιφάνεια, τότε για να δίνει η R τη μέγιστη κατακόρυφη δύναμη, μια μικρή μεταβολή της επιφάνειας κατά $\eta(\theta, \phi)$ θα πρέπει, να

ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \cos \theta \eta(\theta, \phi) = 0$ ή υπό την μορφή εσωτερικού

γινομένου πρέπει $(\sin \theta \cos \theta, \eta) = 0$. Αλλά το $\eta(\theta, \phi)$ πρέπει να είναι τέτοιο ώστε η παραπλήσια της R επιφάνεια να έχει και αυτή μάζα M άρα πρέπει

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta R^2(\theta, \phi) \eta(\theta, \phi) = 0, \text{ ή υπό την μορφή εσωτερικού γινομένου θα}$$

πρέπει $(\sin\theta R^2, \eta) = 0$, άρα υπάρχει αριθμός λ ώστε $\sin\theta \cos\theta = \lambda \sin\theta R^2$, άρα η επιφάνεια που μεγιστοποιεί το πεδίο είναι η $R(\theta, \phi) = A\sqrt{\cos\theta}$, και η σταθερά A μπορεί να προσδιορισθεί ώστε η συνολική μάζα του πλανητοειδούς να είναι M . Η επιφάνεια είναι πράγματι συμμετρική ως προς την κατακόρυφο, αφού το σχήμα της δεν έχει εξάρτηση από τη ϕ . Το σχήμα της είναι σχετικά πεπλατυσμένο γύρω από το σημείο O όπως φαίνεται στο σχήμα.



Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με το να απαιτήσουμε το

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(G \sin\theta \cos\theta R + \frac{\lambda}{3} \sin\theta R^3 \right) \text{ να}$$

καταστεί ακρότατο. Οι εξισώσεις EulerLagrange οδηγούν τότε στη σχέση:

$$\frac{\partial (G \sin\theta \cos\theta R + \frac{\lambda}{3} \sin\theta R^3)}{\partial R} = 0,$$

δηλαδή στην $R(\theta, \phi) = A\sqrt{\cos\theta}$, όπως και

προηγουμένως.

ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ LAGRANGE ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ειδικά στα μηχανικά συστήματα, όπου κανείς, προκειμένου να καθορίσει τη φυσική διαδρομή, αναζητά το ακρότατο της δράσης –η οποία είναι συναρτησοειδές και όχι συνάρτηση– δεδομένων κάποιων συνδέσμων οι οποίοι έχουν τη μορφή συνάρτησης, μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω μεθοδολογία ως ακολούθως: Η στασιμότητα της δράσης ενός μηχανικού συστήματος εξασφαλίζεται όταν

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \right) \cdot \vec{n}(t) = 0 \text{ για κάθε συνάρτηση } \vec{n}(t) \text{ που ικανοποιεί απλώς τις}$$

συνοριακές συνθήκες $\vec{n}(t_1) = \vec{n}(t_2) = 0$ (θυμηθείτε την εξαγωγή των εξισώσεων Euler-Lagrange). Αν επιπλέον κάποιος σύνδεσμος επιβάλλει περιορισμό στις συντεταγμένες της μορφής $g(\vec{q}) = 0$, πρέπει το τυχαίο διάνυσμα $\vec{n}(t)$ να είναι τέτοιο ώστε η παραλλαγμένη διαδρομή να εξακολουθεί να ικανοποιεί την $g(\vec{q} + \varepsilon \vec{n}(t)) = 0$. Αυτό

αυτόματα συνεπάγεται ότι το $\vec{n}(t)$ είναι κάθετο στο $\vec{\nabla} g$. Αν θεωρήσουμε τώρα διανύσματα $\vec{n}(t)$ μη μηδενικά για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, π.χ. $\vec{n}(t) \neq 0$ μόνο για $t_* \leq t \leq t_* + \delta t$, τέτοια όμως ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση του συνδέσμου αλλά και να καθιστούν τη δράση στάσιμη, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = \lambda(t_*) \vec{\nabla} g \text{ για οποιοδήποτε χρόνο } t_*. \text{ Ο πολλαπλασιαστής Lagrange}$$

στην περίπτωση αυτή είναι εν γένει συνάρτηση του χρόνου. Με αυτή τη γενίκευση μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange σε προβλήματα λογισμού των μεταβολών που υπόκεινται σε συνδέσμους. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη (1) όταν οι εξισώσεις των συνδέσμων δεν είναι τέτοιες ώστε να μπορεί απλά να απαλειφεί κανείς τις εξαρτημένες συντεταγμένες από τη

Λαγκρανζιανή, όπως για παράδειγμα κάναμε με την z-συντεταγμένη στο πρώτο πρόβλημα με συνδέσμους που αντιμετωπίσαμε, και (2) όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται εξαιτίας των συνδέσμων.