

Μηχανική II

Αδιαβατικά αναλλοίωτα

Είδαμε ότι όταν η Χαμιλτονιανή συνάρτηση δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο τότε αυτή διατηρείται κατά την κίνηση και επομένως η τροχιά του συστήματος βρίσκεται επί της επιφανείας $H = \text{σταθερό}$. Στην περίπτωση συστημάτων ενός βαθμού ελευθερίας (διδιάστατου χώρου φάσεων) η σταθερότητα της Χαμιλτονιανής αποτελεί και λύση του προβλήματος της τροχιάς του συστήματος: η τροχιά είναι εκείνη η καμπύλη στο χώρο των φάσεων της οποίας κάθε σημείο αντιστοιχεί στη σταθερή τιμή της Χαμιλτονιανής. Είναι η καμπύλη που ικανοποιεί τη μαθηματική σχέση $H(q, p) = \text{σταθερό}$.

Αν όμως η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από το χρόνο, πράγμα το οποίο συμβαίνει αν το σύστημα που μελετάμε δέχεται εξωτερικές επιδράσεις τις οποίες επιβάλλουμε, τότε η κίνηση δεν μπορεί να περιγραφεί τόσο απλά. Η Χαμιλτονιανή τότε δεν είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, δηλαδή δεν διατηρείται. Στην περίπτωση αυτή θα ήταν ιδιαίτερος χρήσιμο να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα όσα γνωρίζουμε για τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Όπως αντιλαμβάνεται κανείς αυτό δεν είναι γενικά δυνατό. Υπάρχουν όμως δύο περιπτώσεις για τις οποίες η άντληση πληροφοριών από τη συμπεριφορά του χρονικά ανεξάρτητου συστήματος είναι δυνατή.

Η πρώτη περίπτωση, ευρέως ενδιαφέροντος, είναι όταν το σύστημα είναι περιοδικό και η χρονική μεταβολή της Χαμιλτονιανής γίνεται σε χρόνους πολύ βραδύτερους σε σύγκριση με την περίοδο του συστήματος. Η μεταβολή του συστήματος λέγεται τότε *αδιαβατική*. Για αυτή την περίπτωση έχει αναπτυχθεί μια πολύ χρήσιμη θεωρία η οποία αρχίζει από μία παρατήρηση του Boltzmann, την οποία ο Bohr απεκάλεσε αρχή της μηχανικής μετασχηματιστικότητας (mechanical transformability), και την οποία αργότερα ο Ehrenfest απεκάλεσε αδιαβατικό θεώρημα.

Το θεώρημα αυτό βρήκε δόκιμη εφαρμογή στα πρώτα βήματα της κβαντικής μηχανικής όταν ο Bohr και ο Sommerfeld είχαν προτείνει τον κβαντισμό ποσοτήτων της μορφής $\oint p dq$. Σύμφωνα με τη θεωρία των Bohr – Sommerfeld, ποσότητες της μορφής $\oint p dq$ παίρνουν διακριτές τιμές.

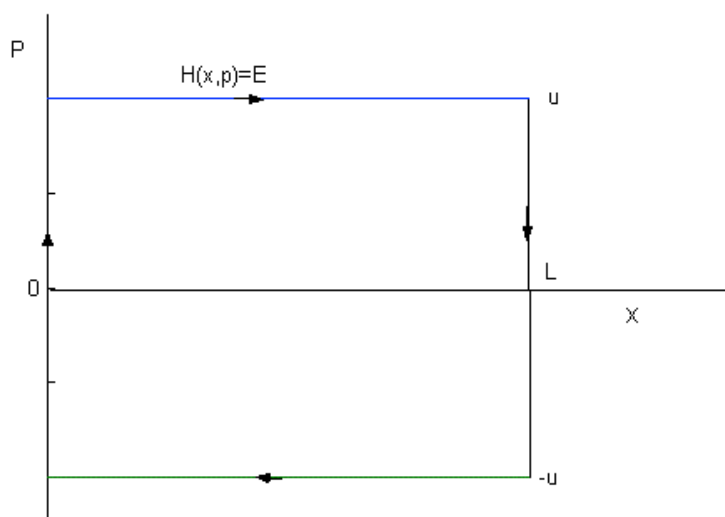
Έχουμε ήδη δείξει ότι για ένα περιοδικό σύστημα με χρονικά ανεξάρτητη Χαμιλτονιανή, το $\oint p dq$ είναι η επιφάνεια που περιγράφει η κλειστή τροχιά του συστήματος στο χώρο των φάσεων. Τι συμβαίνει όταν το σύστημα εξαρτάται ασθενώς από το χρόνο; Είναι δυνατό να παραμένει το $\oint p dq$ σταθερό; Το αδιαβατικό θεώρημα το οποίο αποδεικνύει ότι αν η Χαμιλτονιανή μεταβάλλεται αδιαβατικά, έδωσε θετική απάντηση στο ερώτημα που είχε ανακύψει, και η ποσότητα που μένει σταθερή, δηλαδή το ολοκλήρωμα $\oint p dq$ κατά μήκος μιας κλειστής (ή σχεδόν

κλειστής αφού αλλάζει η ενέργεια) διαδρομής στο χώρο των φάσεων ονομάστηκε *αδιαβατικό αναλλοίωτο* (adiabatic invariant).

Η δεύτερη περίπτωση για την οποία μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες από το χρονικά ανεξάρτητο σύστημα είναι όταν η μεταβολή της Χαμιλτονιανής είναι περιοδική με περίοδο πολύ μικρότερη από το χρόνο εξέλιξης του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση η ταχεία μεταβολή της Χαμιλτονιανής αλληλοαναιρείται και η συμπεριφορά του συστήματος ακολουθεί τη θεωρία που ανέπτυξε ο Kapitza (βλ. Μηχανική Landau, κεφάλαιο 30).

Η αδιαβατική θεωρία έχει πολλές εφαρμογές σε πολλά κλασσικά προβλήματα, π.χ. η κίνηση των πλανητών επηρεάζεται από τη μεταβολή της μάζας του Ήλιου. Αλλά η αλλαγή της μάζας του Ήλιου είναι πολύ βραδεία σε σύγκριση με την περίοδο περιστροφής των πλανητών - η μάζα αλλάζει κατά ένα παράγοντα της τάξης του 10^{-13} ανά έτος, οπότε στο ηλιακό σύστημα η αδιαβατική θεώρηση είναι θεμιτή. Σε μικροσκοπικές κλίμακες τα άτομα σε ένα δοχείο χαμηλής πίεσης προσκρούουν στα τοιχώματα του δοχείου με περίοδο της τάξης των 10^{-5} - 10^{-4} s, αν λοιπόν ο όγκος του δοχείου μεταβάλλεται σε χρόνους τάξης 1s παρατηρούμε ότι οι αλλαγές που επέρχονται πρέπει να εμπίπτουν στο αδιαβατικό θεώρημα. Οι εφαρμογές του αδιαβατικού θεωρήματος είναι αναρίθμητες σε όλους τους τομείς της φυσικής. Για παράδειγμα στη Μετεωρολογία πρέπει πολλές φορές να υπολογίσουμε τη συμπεριφορά κυμάτων σε μέσα των οποίων ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται είτε με τον χρόνο είτε με τη θέση. Αν η μεταβολή του δείκτη διάθλασης είναι βραδεία ως προς τη περίοδο του κύματος και η χωρική μεταβολή είναι μηδαμινή σε ένα μήκος κύματος, τότε μπορεί να εφαρμοσθεί η αδιαβατική θεωρία στη μετάδοση του κύματος.

Πριν αποδείξουμε το αδιαβατικό θεώρημα θα δείξουμε με ένα απλό παράδειγμα την ισχύ του. Θεωρούμε μια μπάλα μοναδιαίας μάζας η οποία ανακλάται ελαστικά στα τοιχώματα ενός δοχείου. Το ένα τοίχωμα το αριστερό θεωρείται ακίνητο ενώ το



απέναντί του πλησιάζει το πρώτο με ταχύτητα U (κάτι σαν έμβολο που συμπιέζει το χώρο κίνησης της μπάλας). Θεωρούμε μονοδιάστατη κίνηση. Εάν $U = 0$ τότε η ποσότητα

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq^1 \quad \text{είναι}$$

$$J = \frac{Lu}{\pi}, \quad \text{όπου } L \text{ η}$$

απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων και u η ταχύτητα της μπάλας. Η

κίνηση του σωματιδίου στο χώρο των φάσεων για δεδομένη ενέργεια του σωματιδίου παρουσιάζεται στο σχήμα.

¹ Η διαίρεση με 2π γίνεται για φορμαλιστικούς λόγους, ώστε αν η q θεωρηθεί ως μια γωνία που εκτελεί ένα πλήρη κύκλο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, η ποσότητα J να θυμίζει τη μορφή της μέσης τιμής. Η διαίρεση αυτή οδήγησε και στην εισαγωγή στην κβαντομηχανική του νέου συμβόλου $\hbar = h/2\pi$.

Έστω τώρα ότι τα τοιχώματα πλησιάζουν με ταχύτητα $U \ll u$ ώστε το σύστημα να μεταβάλλεται ελάχιστα στον χαρακτηριστικό χρόνο του συστήματος $2Lu$ (τον χρόνο που αντιστοιχεί σε ένα πήγαινε-έλα της μπάλας). Η ταχύτητα της μπάλας πλέον δεν παραμένει σταθερά. Εάν η ταχύτητα της μπάλας πριν από την n -οστή κρούση με το κινούμενο τοίχωμα είναι u_{n-1} και αμέσως μετά από τη n -οστή κρούση είναι u_n , επειδή το μέτρο της σχετικής ταχύτητας της μπάλας ως προς το τοίχωμα είναι σταθερή, θα είναι $u_n - U = u_{n-1} + U$ και συνεπώς :

$$u_n = u_{n-1} + 2U$$

επομένως εύκολα βλέπει κανείς ότι η ταχύτητα μετά την n -οστή κρούση θα είναι

$$u_n = u + 2nU. \quad (1)$$

Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων, όταν συμβαίνει η n -οστή κρούση με το κινούμενο τοίχωμα, είναι x_n και ο χρόνος μεταξύ της n -οστής και της $(n+1)$ -οστής κρούσης με το κινούμενο τοίχωμα είναι τ_n . Τότε θα ισχύει ότι η μείωση της απόστασης μεταξύ των τοιχωμάτων στο διάστημα τ_n είναι

$$x_{n+1} - x_n = -U\tau_n$$

ενώ παράλληλα το σωματίδιο στο χρόνο τ_n έχει διανύσει απόσταση $x_{n+1} + x_n$, κινούμενο με ταχύτητα u_n και συνεπώς

$$\tau_n = \frac{x_{n+1} + x_n}{u_n}.$$

Είναι εύκολο να συνδέσει κανείς τις δύο τελευταίες σχέσεις, χρησιμοποιώντας και τον αναγωγικό τύπο (1) για τις ταχύτητες για να καταλήξει στον αναγωγικό τύπο

$$x_{n+1} = x_n \frac{u_0 + (2n-1)U}{u_0 + (2n+1)U},$$

όπου u_0 η αρχική ταχύτητα κίνησης της μπάλας. Η παραπάνω αναγωγική σχέση εύκολα καταλήγει στη γενική σχέση

$$x_n = L \left(\frac{u_0}{u_0 + (2n+1)U} \right), \quad (2)$$

αν γράψει κανείς τα διαδοχικά x_n , προσέχοντας λίγο τη μορφή του x_1 ($x_1 = Lu_0 / (u_0 + U)$). Ορίζουμε τώρα ως *δραστική μεταβλητή* (action variable) την

ποσότητα $J_n = \frac{1}{2\pi} \oint p dx$ υπολογισμένο στην κλειστή διαδρομή από την n -οστή κρούση της μπάλας στο ακλόνητο τοίχωμα μέχρι τη $(n+1)$ -οστή κρούση στο ίδιο τοίχωμα. Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται ότι

$$J_n = \frac{x_{n+1}(u_n + u_{n+1})}{2\pi} = J_0 \frac{u_0 + (2n+1)U}{u_0 + (2n+3)U}, \quad (3)$$

όπου $J_0 = \frac{Lu_0}{\pi}$ (η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την εκκίνηση της μπάλας από το ακλόνητο τοίχωμα μέχρι την πρώτη της κρούση με αυτή). Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη μεταβολή της δραστικής αυτής μεταβλητής όταν τα τοιχώματα

κινούνται αδιαβατικά δηλαδή όταν $u_0 \gg U$. Ας κάνουμε ένα πείραμα. Έστω ότι $u_0 = 1$, $L = 1$ και $U = 0.01$. Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε την κινητική ενέργεια της μπάλας $E_n = \frac{1}{2}u_n^2$ και την απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων x_n τη στιγμή αμέσως μετά τη n -οστή κρούση με το κινούμενο τοίχωμα, καθώς και την τιμή της J_{n-1} κατά την κλειστή διαδρομή που εμπεριέχει την προαναφερθείσα κρούση με το κινούμενο τοίχωμα (τα J υπολογίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων με το ακλόνητο τοίχωμα).

n	x_n	E_n	πJ_{n-1}
1	0.99	0.52	1
10	0.83	0.72	0.9835
50	0.50	2.00	0.9900
100	0.33	4.50	0.9934
500	0.09	60.50	0.9982
1000	0.05	220.50	0.9990

Παρατηρούμε ότι παρότι μετά από 1000 κρούσεις η ενέργεια της μπάλας έχει αυξηθεί κατά 220 φορές και η απόσταση μεταξύ των τοιχωμάτων έχει σχεδόν μηδενισθεί η δράση έχει παραμείνει σχεδόν σταθερή. Το καταπληκτικό αυτό αποτέλεσμα είναι το αδιαβατικό θεώρημα. Αξίζει να δοκιμάσετε και με μεγαλύτερες τιμές της U για να διαπιστώσετε ότι το θεώρημα έχει πολύ ευρεία ισχύ. Στη περίπτωση αυτή επειδή τα τοιχώματα πλησιάζουν η περίοδος της κίνησης μικραίνει και η αδιαβατικότητα της κίνησης γίνεται ολοένα και πιο ακριβής. Τι θα συμβεί αν τα τοιχώματα αντί να πλησιάζουν, απομακρύνονται; Τότε συν τω χρόνο η κίνηση της μπάλας θα είναι ολοένα και πιο βραδεία οπότε η απομάκρυνση του τοιχώματος θα αρχίσει να γίνεται συγκρίσιμη με αυτή της μπάλας. Το καταπληκτικό είναι ότι και σε αυτή την περίπτωση, τουλάχιστον μέχρι να καταστούν συγκρίσιμοι οι χαρακτηριστικοί χρόνοι της μπάλας και της μετακίνησης του τοιχώματος, η δράση παραμένει σχεδόν αναλλοίωτη. Δοκιμάστε το! (Υπάρχει κάποιος γρήγορος τρόπος να μετατρέψετε τις προηγούμενες σχέσεις στις αντίστοιχες για το εν λόγω πρόβλημα.)

Η γενική απόδειξη του αδιαβατικού θεωρήματος είναι δύσκολη και συνήθως δυσνόητη όπως παρουσιάζεται στα διάφορα βιβλία Μηχανικής. Θα καταφύγουμε σε μια απόδειξη η οποία παρουσιάζει γενικότερη από το αδιαβατικό θεώρημα ισχύ και είναι πιο παραστατική στην επιχειρηματολογία της. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα, πολλών εν γένει βαθμών ελευθερίας, το οποίο περιγράφεται από μια Χαμιλτονιανή η σταθερότητα της οποίας καθορίζει μια κλειστή υπερεπιφάνεια στο χώρο των φάσεων. Το ότι η επιφάνεια είναι κλειστή σημαίνει απλώς ότι έχουμε θεωρήσει ένα σύστημα περιορισμένο να κινείται εντός συγκεκριμένων διαστημάτων σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας του χωρίς κατ' ανάγκη να σημαίνει ότι η κίνηση είναι περιοδική. (Στην περίπτωση ενός βαθμού ελευθερίας η υπερεπιφάνεια είναι μια κλειστή καμπύλη που περιγράφει τη διαδρομή του συστήματος στον χώρο των φάσεων και η κίνηση είναι κατ' ανάγκη περιοδική.) Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σύστημα, εκτός των ορμών και των θέσεων, εξαρτάται και από κάποια παράμετρο λ η οποία όμως μεταβάλλεται με πολύ αργό ρυθμό σε σχέση με όλους τους χαρακτηριστικούς χρόνους του συστήματος, δηλαδή τον εκάστοτε χρόνο που απαιτείται ώστε κάθε συντεταγμένη τού συστήματος να διαγράψει έναν πλήρη «κύκλο».

Ορίζουμε τη χρονική στιγμή $t = 0$ την υπερεπιφάνεια $H(p, q, \lambda(0)) = E$ που αντιστοιχεί σε μια ορισμένη τιμή της παραμέτρου $\lambda = \lambda(0)$ και τιμή της Χαμιλτονιανής E , και υπολογίζουμε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται από αυτήν την υπερεπιφάνεια. Με τη πάροδο του χρόνου η υπερεπιφάνεια αυτή θα εξελιχθεί σε μια νέα επιφάνεια η οποία όμως σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville (το οποίο ισχύει και όταν η Χαμιλτονιανή συνάρτηση έχει άμεση χρονική εξάρτηση) θα περικλείει τον ίδιο όγκο με την αρχική. Το περιεχόμενο του αδιαβατικού θεωρήματος είναι ότι οι επιφάνειες που διαμορφώνονται με την πάροδο του χρόνου αντιστοιχούν και σε επιφάνειες σταθερής τιμής της Χαμιλτονιανής συνάρτησης. Σε σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας αυτό συνεπάγεται ότι το εμβαδόν που περικλείεται από τη καμπύλη $H(p, q, \lambda) = E$, το οποίο για δεδομένο λ δίδεται από το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης $H(p, q, \lambda) = E$: $\oint p dq$, σύμφωνα με το αδιαβατικό θεώρημα είναι μια σταθερή ποσότητα. (Το εμβαδόν του χωρίου είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διότι μπορούμε να λύσουμε την $H(p, q, \lambda) = E$, ως προς p).

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι όλα τα σημεία $\vec{q}, \vec{p}$ που αποτελούν την υπερεπιφάνεια $H(p, q, \lambda) = E$ για κάποιο E και λ μία χρονική στιγμή εξελίσσονται σε σημεία $\vec{q}, \vec{p}$ τα οποία κείνται στην επιφάνεια $H(p, q, \lambda + \Delta\lambda) = E + \Delta E$ ύστερα από τόσο χρόνο ώστε το λ να έχει λάβει την τιμή $\lambda + \Delta\lambda$, όπου το ΔE δεν εξαρτάται από τα αρχικά $\vec{q}, \vec{p}$ αλλά μόνο από το χρόνο που έχει διέλθει.

Λαμβάνουμε τα σημεία $\vec{q}, \vec{p}$ που αποτελούν την υπερεπιφάνεια $H(p, q, \lambda) = E$ για κάποιο E και λ . Εάν το λ δεν ήταν χρονικά εξαρτώμενο τότε τα $\vec{q}, \vec{p}$ θα διέτρεχαν την υπερεπιφάνεια αυτή σταθερής ενεργείας E . Το λ όμως μεταβάλλεται, και συνεπώς η τιμή της Χαμιλτονιανής συνάρτησης κατά μήκος της τροχιάς που διαγράφει κάθε σημείο που ξεκίνησε από την υπερεπιφάνεια $H(p, q, \lambda) = E$ δεν παραμένει σταθερή.

Η αλλαγή της τιμής της Χαμιλτονιανής για τα σημεία της τροχιάς που ξεκινά από κάποιο σημείο $\vec{q}_0, \vec{p}_0$ της επιφανείας $H(p, q, \lambda) = E$ προσδιορίζεται από την:

$$\frac{dH}{dt} = [H, H] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda}.$$

Έτσι η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος που ξεκίνησε από το σημείο $\vec{q}_0, \vec{p}_0$

σε ένα χρονικό διάστημα ΔT , θα είναι $\Delta H_{\vec{q}_0, \vec{p}_0} = \int_0^{\Delta T} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} dt$, όπου σημειώνουμε ότι η

αλλαγή αυτή εξαρτάται από το σημείο $\vec{q}_0, \vec{p}_0$. Θα θεωρήσουμε ότι $\Delta T \gg \tau$, όπου τ η μεγαλύτερη από τις περιόδους για τις διάφορες συντεταγμένες του συστήματος, αλλά ότι ταυτόχρονα το ΔT είναι πολύ μικρότερο από τον χαρακτηριστικό χρόνο μεταβολής του λ . Σε χρόνο τ η λ δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά, δηλαδή $\dot{\lambda} \tau \ll \lambda$, οπότε στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα το $\dot{\lambda}$ μπορεί να εκληφθεί ως σταθερό

$$\Delta H = \sum_j \dot{\lambda}(j\tau) \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt = \int_0^{\Delta T} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \dot{\lambda} dt,$$

όπου $\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} = \frac{1}{\tau} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt$ κατά το χρονικό διάστημα $j\tau \leq t \leq (j+1)\tau$, είναι η μέση

τιμή της $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ ως προς μία περίοδο, η οποία είναι ανεξάρτητη από το αρχικό σημείο

$\vec{q}_0, \vec{p}_0$. Συνεπώς στον παραπάνω υπολογισμό της μέσης τιμής αφαιρούμε την εξάρτηση του αποτελέσματος από το συγκεκριμένο αρχικό σημείο και έτσι αποδεικνύουμε ότι σε αδιαβατικές αλλαγές η μεταβολή της τιμής της Χαμιλτονιανής είναι ίδια για όλα τα σημεία. Έτσι όλα τα σημεία της αρχικής υπερεπιφάνειας μετά από χρόνο ΔT , θα βρεθούν σε μια άλλη υπερεπιφάνεια που θα χαρακτηρίζεται πάλι από συγκεκριμένη ενέργεια. Το θεώρημα Liouville πλέον εξασφαλίζει την σταθερότητα του όγκου που περικλείει αυτή η υπερεπιφάνεια.