Τμήμα Π. Ιωάννου &
Θ. Αποστολάτου
22/5/2000

E

Μηχανική ΙΙ

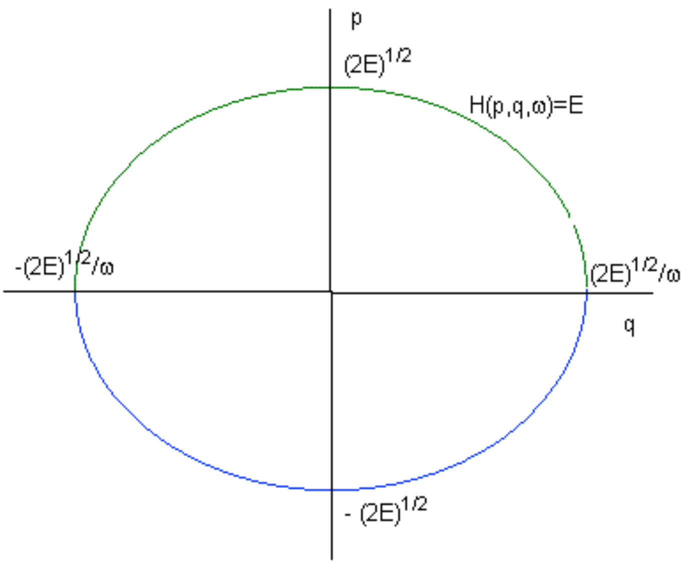
Ταλαντωτής με μεταβλητή συχνότητα

Τι θα συμβεί στην περίοδο ενός εκκρεμούς εάν το μήκος του νήματος μεταβάλλεται με αργό ρυθμό; Το πρόβλημα προτάθηκε από τον Lorentz στον Einstein κατά τη διάρκεια του Solvay Conference το 1911.

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θεωρούμε μικρές κινήσεις του εκκρεμούς. Η Χαμιλτονιανή τότε είναι $H = \frac{p^2}{2} + \omega^2(t)\frac{q^2}{2}$, όπου $\omega^2(t)$ μια συνάρτηση με πολύ αργή εξέλιξη με το χρόνο. Εάν η συχνότητα δεν μεταβαλλόταν η ενέργεια E θα ήταν σταθερή και η δραστική μεταβλητή

$$J(E,\omega) = \oint p(q,E,\omega)dq$$

θα ήταν ίση με $A(E)$, όπου $A(E)$ το εμβαδόν της επιφανείας που περικλείει η τροχιά. Η τροχιά για σταθερό είναι μια έλλειψη με ημιάξονες $\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ και $\sqrt{2E}$, συνεπώς $A(E) = 2\pi\frac{E}{\omega}$. Από το αδιαβατικό θεώρημα περιμένει κανείς, σε αδιαβατικές μεταβολές της συχνότητας ταλάντωσης, η δραστική μεταβλητή να μην μεταβάλλεται και συνεπώς η ποσότητα $\frac{E}{\omega}$ θα παραμένει, με μεγάλη προσέγγιση, σταθερά.



Είναι ενδιαφέρον στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι παρότι στο πρόβλημα αυτό χάνεται η διατήρηση της ενέργειας, αφού η Λαγκρανζιανή δεν είναι αναλλοίωτη σε χρονικές μεταθέσεις, για αδιαβατικές μεταβολές των παραμέτρων διατηρείται μια νέα ποσότητα, η E/ω. Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι οι διατηρήσιμες ποσότητες προέρχονται από κάποια συμμετρία του συστήματος. Εύλογα λοιπόν ανακύπτει το ερώτημα από ποια προσεγγιστική συμμετρία προέρχεται το αδιαβατικό αυτό αναλλοίωτο; Στο ερώτημα αυτό θα δώσουμε απάντηση αργότερα. Προς το παρόν θα μελετήσουμε την εξέλιξη της κίνησης βασισμένοι στη διατήρηση του αναλλοίωτου αυτού.

Επειδή $E = \frac{1}{2}\omega^2 A^2$, όπου $A(t)$ το πλάτος της ταλάντωσης, και $E/\omega =$ σταθερό, θα είναι $A(t) = A_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega(t)}}$, όπου A_0 το αρχικό πλάτος και ω_0 η αρχική συχνότητα.

Προσέγγιση WKBJ

Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0,$$

όπου το $\omega(t)$ θεωρούμε ότι μεταβάλλεται αδιαβατικά. Ποια είναι η θέση του σωματιδίου στην αδιαβατική αυτή προσέγγιση; Αν η συχνότητα ήταν σταθερή, ω_0, η κίνηση του ταλαντωτή θα δινόταν από τη σχέση

$$q(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

όπου A_0 το σταθερό πλάτος και α μια σταθερή φάση. Στην περίπτωση που η συχνότητα μεταβάλλεται αδιαβατικά είναι λογικό να αναμένουμε ότι η λύση θα είναι και πάλι της μορφής

$$q(t) = A(t)\cos(\theta(t)),$$

όπου το $A(t)$ μεταβάλλεται αργά με το χρόνο και η φάση εξελίσσεται σύμφωνα με τη στιγμιαία σχέση:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t).$$

Το αδιαβατικό αναλλοίωτο προσδιορίζει την $A(t)$, οπότε η κίνηση του ταλαντωτή αναμένεται να είναι:

$$q(t) = A_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega(t)}}\cos\left(\int_0^t \omega(s)ds + \alpha\right).$$

Αυτή η λύση ικανοποιεί με μεγάλη ακρίβεια την εξίσωση κίνησης $\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0$, όπως εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε με απλές πράξεις, ακόμα και για χρόνους όπου η συχνότητα έχει αλλάξει σημαντικά. Η παραπάνω λύση στο πρόβλημα του ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα είναι πολύ χρήσιμη και ονομάζεται προσέγγιση WKBJ (αρχικά των Wentzel (δημοσίευση του 1926), Kramers (1926), Brillouin (1926) και Jeffreys (δημοσίευση του 1923))[1].

Σαν παράδειγμα λαμβάνουμε $\omega^2 = 1 + at$, με $a = 0.1$. Η αδιαβατική προσέγγιση δίνει, αν αρχικά ήταν $q = 1, p = 0$,

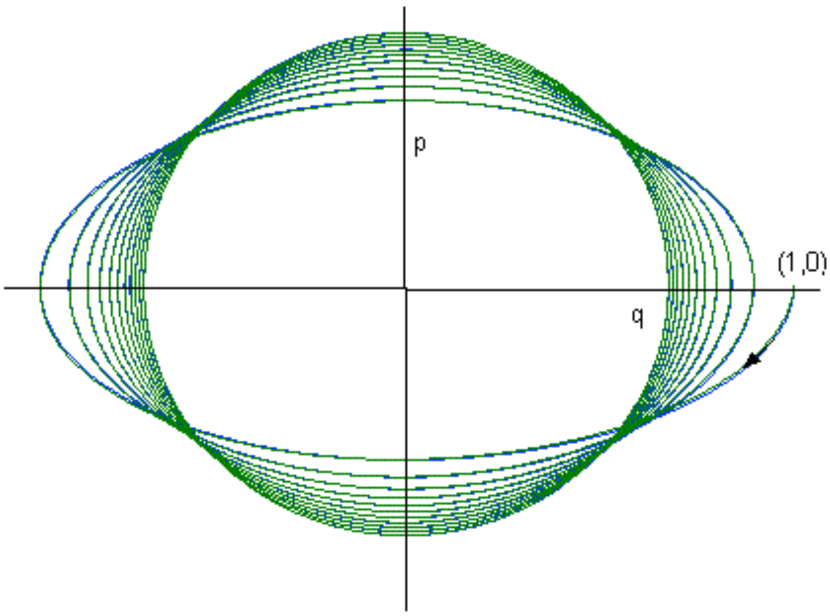
[1] Παρότι όλοι συμφωνούν ότι οι κύριοι W, K, B, J δεν ανακάλυψαν την προσέγγιση αυτή, δεν υπάρχει συμφωνία για τον ποιος την ανακάλυψε. Σίγουρα οι ακόλουθοι επιστήμονες συνέβαλαν στην ανάπτυξη της μεθόδου: Liouville (1837) , Green (1837) (γι αυτό η προσέγγιση αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως προσέγγιση Liouville-Green), Rayleigh (1912), Gans (1915). Στην κβαντική μηχανική η προσέγγιση αυτή αναφέρεται απλώς ως WKB, χωρίς το J, επειδή ο J χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτή σε μετεωρολογικές μελέτες οι οποίες δεν ήταν γνωστές στους ερευνητές της κβαντικής μηχανικής.

$$q(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+at}}\cos\left(\int_0^t\sqrt{1+as}\,ds\right)$$

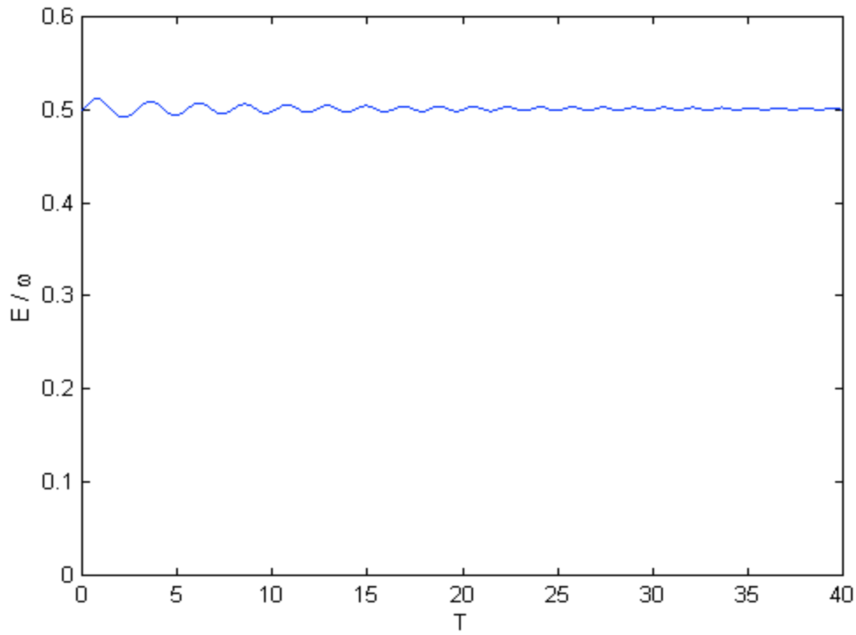
και στο ίδιο επίπεδο προσέγγισης

$$p(t)=-\sqrt[4]{1+at}\,\sin\left(\int_0^t\sqrt{1+as}\,ds\right)$$

όπου η φάση εύκολα υπολογίζεται ότι είναι: $\int_0^t\sqrt{1+as}\,ds=\frac{2}{3a}\left((1+at)^{3/2}-1\right)$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η τροχιά, υπολογισμένη με αριθμητική ολοκλήρωση του ακριβούς προβλήματος πρώτα και έπειτα αυτή που προκύπτει από την προσέγγιση WKBJ. Φαίνεται από το σχήμα ότι η τροχιά δεν είναι περιοδική και ότι το χωρίο παραμορφώνεται. Η αδιαβατική σταθερά προκύπτει από το αναλλοίωτο του εμβαδού γύρω από μία περιστροφή (η αντίστοιχη καμπύλη δεν κλείνει). Η σύμπτωση της προσεγγιστικής λύσης WKBJ με την πραγματική είναι εξαιρετική!



Η εξέλιξη του εμβαδού αυτού του χωρίου που είναι κατά προσέγγιση ίσο με $A(E)=2\pi\frac{E}{\omega}$ παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα. Παρατηρήστε τη σταθερότητα του αδιαβατικού αναλλοίωτου. Αξιοσημείωτο δε είναι ότι συν τω χρόνω το αδιαβατικό αναλλοίωτο γίνεται ακριβέστερο. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό (θυμηθείτε το έμβολο με την μπάλα);



Συμμετρία από την οποία προέρχεται το αδιαβατικό αναλλοίωτο

Το ερώτημα που θα απαντήσουμε στη συνέχεια είναι από ποια συμμετρία προκύπτει το αδιαβατικό θεώρημα. Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα το τι συμβαίνει θα εστιάσουμε το ερώτημα στην περίπτωση του ταλαντωτή με μεταβαλλόμενη συχνότητα. Η φυσική κίνηση καθιστά τη δράση στάσιμη. Προσπαθούμε να βρούμε τη φυσική κίνηση από τροχιές της μορφής $q(t) = A(t)\cos(\theta(t))$, όπου $A(t)$ και $\theta(t)$ ανεξάρτητες συναρτήσεις που θα προσδιοριστούν από την απαίτηση ότι η δράση πρέπει να είναι στάσιμη για την $A(t)$ και $\theta(t)$ της φυσικής κίνησης. Επιλέξαμε τη μορφή αυτή διότι γνωρίζουμε ότι όταν η συχνότητα είναι σταθερή, η φυσική κίνηση είναι της μορφής αυτής, και λόγω της αδιαβατικότητας της μεταβολής της συχνότητας αναμένουμε ότι η μορφή της λύσης θα παραμείνει η ίδια, με το $A(t)$ να αντιστοιχεί σε μια βραδέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Συγκεκριμένα απαιτούμε $\dot{A} << \omega A$ (δηλαδή η A να μη μεταβάλλεται σημαντικά σε μία περίοδο) οπότε η ταχύτητα λαμβάνεται κατά προσέγγιση ως:

$$\dot{q} = -A(t)\frac{d\theta}{dt}\sin\theta(t)\,.$$

Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση για τις θεωρηθείσες τροχιές παίρνει τότε τη μορφή:

$$L = \frac{1}{2}\left[A^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin^2\theta - \omega^2(t)A^2\cos^2\theta\right]$$

και η απαίτηση για τη φυσική τροχιά είναι ότι για οποιεσδήποτε ανεξάρτητες μεταβολές $\delta A(t)$ και $\delta\theta(t)$ η δράση να είναι στάσιμη. Συνεπώς οι $A(t), \theta(t)$ πρέπει να είναι τέτοιες ώστε:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\left[A^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin^2\theta - \omega^2(t) A^2 \cos^2\theta \right] dt = 0 .$$

Στο ολοκλήρωμα αυτό το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ λαμβάνεται πολύ μεγαλύτερο από την περίοδο του συστήματος $2\pi / \omega$.

Επειδή όμως έχουμε θεωρήσει τα $A, \omega, {}^{d\theta}\!/\!_{dt}$ ότι μεταβάλλονται με πολύ βραδύ ρυθμό συγκριτικά με το θ, μπορούμε με μεγάλη ακρίβεια να αντικαταστήσουμε τις τριγωνομετρικές ποσότητες $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ με τη μέση τιμή τους ${}^{1}\!/\!_{2}$ στην έκφραση για τη στασιμότητα της δράσης. Αναμένουμε λοιπόν να προσδιορίσουμε την εξέλιξη των $A(t)$ και $\theta(t)$ από την στασιμότητα της δράσης που παράγεται από τη μέση Λαγραντζιανή συνάρτηση:

$$\overline{L}(A, \dot{A}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{4}\left[A^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega^2(t) A^2 \right],$$

η οποία πρέπει να διέπει την μακροχρόνια εξέλιξη του συστήματος. Παρατηρούμε όμως ότι η μέση Λαγκρανζιανή δεν εξαρτάται από το θ και είναι συνεπώς αναλλοίωτη σε μεταθέσεις της φάσης θ, δηλαδή είναι συμμετρική ως προς μεταθέσεις $\theta \to \theta + \varepsilon$. Αυτή η συμμετρία της Λαγκρανζιανής οδηγεί στη διατήρηση κατά τη κίνηση της συζυγούς ορμής του θ ,

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\theta}} = A^2 \frac{d\theta}{dt} = A^2 \omega = \text{σταθερό} ,$$

που είναι το αδιαβατικό αναλλοίωτο (η εξίσωση Euler-Lagrange ως προς A, δίνει

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial A} = \frac{1}{2} A \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega^2(t) \right] = 0 ,$$

που εξασφαλίζει ότι $\dfrac{d\theta}{dt} = \pm\omega(t)$).