

Μηχανική II

Η γενικευμένη αρχή της ελάχιστης δράσης του Χάμιλτον

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης του Χάμιλτον η φυσική κίνηση είναι εκείνη που καθιστά τη δράση στάσιμη

$$S(q_1, q_2, t_1, t_2, q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

για διαδρομές $q(t)$ οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες: $q(t_1) = q_1$, $q(t_2) = q_2$. Δηλαδή η φυσική κίνηση είναι αυτή για την οποία το συναρτησοειδές $S(q_1, q_2, t_1, t_2, q(t))$ καθίσταται ακρότατο. Συνεπώς εάν υπολογίσουμε τη δράση για την τροχιά $q_\varphi(t) + \delta q(t)$ όπου $\delta q(t)$ μια μικρή διαταραχή της φυσικής κίνησης $q_\varphi(t)$ η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$ τότε η μεταβολή της δράσης σε πρώτη τάξη είναι $\delta S = 0$. Η ικανοποίηση αυτής της συνθήκης για κάθε $\delta q(t)$ με $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$ οδηγεί όπως είδαμε στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Παρατηρήστε ότι κατά τον υπολογισμό της μεταβολής της δράσης σε μεταβολές της τροχιάς $q(t)$, οι μεταβολές των $q(t)$, $\delta q(t)$, καθορίζουν τις μεταβολές των $\dot{q}(t)$ μέσω του τύπου: $\delta \dot{q} = \frac{d(\delta q(t))}{dt}$, δηλαδή οι μεταβολές των $q(t)$ και $\dot{q}(t)$ δεν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Συνεπώς οι μεταβολές της τροχιάς $\delta q(t)$ καθορίζουν και τις μεταβολές των συζυγών ορμών $p(t)$ δεδομένου ότι οι συζυγείς ορμές προσδιορίζονται από τη σχέση: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε τη δράση μιας τυχούσας τροχιάς συναρτήσει της Χαμιλτονιανής συνάρτησης

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt \quad (1)$$

και να διατυπώσουμε την αρχή του Χάμιλτον ως ακολούθως: η φυσική κίνηση $q_\varphi(t)$ καθιστά την (1) ακρότατη για μεταβολές της τροχιάς $\delta q(t)$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$. Επειδή στη διατύπωση αυτή $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ οι μεταβολές $\delta q(t)$ συνεπάγονται μεταβολές στα $\dot{q}(t)$ και κατ' επέκταση στα $p(t)$. Δηλαδή στην παραπάνω διατύπωση οι μεταβολές $\delta q(t)$ και $\delta p(t)$ δεν είναι ανεξάρτητες. Ας υπολογίσουμε τη μεταβολή της δράσης σε μια τέτοια μεταβολή της τροχιάς:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q \right] dt \quad (2)$$

επειδή όμως η Χαμιλτονιανή είναι μετασχηματισμός Legendre της Λαγκρανζιανής η σχέση $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ συνεπάγεται την $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ και αντιστρόφως (οι σχέσεις αυτές όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο δεν έχουν δυναμικό περιεχόμενο, είναι σχέσεις μαθηματικές που ορίζουν το p ή το $\dot{q}$). Άρα η συμβολή στη μεταβολή της δράσης από τη μεταβολή δp μηδενίζεται. Επειδή δε $\delta \dot{q} = \frac{d(\delta q)}{dt}$, ολοκλήρωση κατά μέρη οδηγεί στην :

$$\delta S = p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt \quad (3)$$

Εάν η φυσική κίνηση καθιστά τη δράση στάσιμη για κάθε $\delta q(t)$ με $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$ τότε $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt = 0$ και συνεπώς η φυσική κίνηση θα πρέπει να ικανοποιεί τη δυναμική εξίσωση $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$. Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης είναι

η $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ (ορισμός του μετασχηματισμού Legendre) και η δυναμική εξίσωση $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$. Με άλλα λόγια, η κλασική αρχή της ελάχιστης δράσης για μεταβολές $\delta q(t)$ με $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η φυσική κίνηση πρέπει να ικανοποιεί τις κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον.

Αποδεσμευόμαστε τώρα από την Λαγκρανζιανή συνάρτηση και ορίζουμε τη δράση ως το συναρτησοειδές:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt \quad (4)$$

όπου οι μεταβλητές q και p είναι τώρα ανεξάρτητες. Η γενικευμένη αρχή του Χάμιλτον μετατρέπεται στην ακόλουθη αρχή: η φυσική κίνηση $(q(t), p(t))$ καθιστά τη δράση (4) στάσιμη για οποιασδήποτε ανεξάρτητες μεταβολές της τροχιάς $(\delta q(t), \delta p(t))$ οι οποίες απλώς ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$. Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης που ικανοποιεί η φυσική τροχιά; Υπολογίζουμε τη μεταβολή της δράσης δS σε μια μεταβολή της τροχιάς $(\delta q(t), \delta p(t))$. Οι μεταβολές $(\delta q(t), \delta p(t))$ είναι τώρα ανεξάρτητες. Για τη μεταβολή της δράσης έχουμε ήδη γράψει την έκφραση (2). Επειδή $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ (τώρα δεν γνωρίζουμε τίποτε περί μετασχηματισμών Legendre), θα ισχύει: $\delta \dot{q} = \frac{d(\delta q)}{dt}$, συνεπώς η (2) γράφεται:

$$\delta S = p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt \quad (5)$$

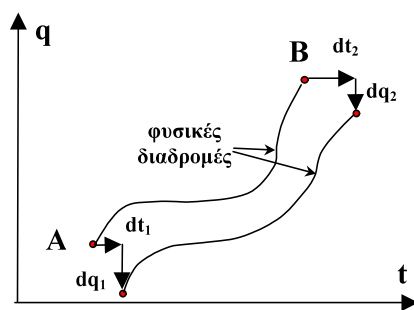
Εάν $\delta q(t_1) = 0$ και $\delta q(t_2) = 0$ η φυσική τροχιά θα πρέπει για κάθε ανεξάρτητη μεταβολή των $(\delta q(t), \delta p(t))$ να είναι $\delta S = 0$. Συνεπώς η φυσική κίνηση ικανοποιεί τις κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Παρακινημένοι από τη μορφή της δράσης κατά τη Χαμιλτονιανή θεώρηση (σχέση 4), ας ορίσουμε στη συνέχεια τη δράση, όχι πλέον ως συναρτησοειδές, αλλά ως συνάρτηση στον θεσεογραφικό χώρο, θεωρώντας ότι το αρχικό και τελικό σημείο συνδέονται με μια φυσική τροχιά:

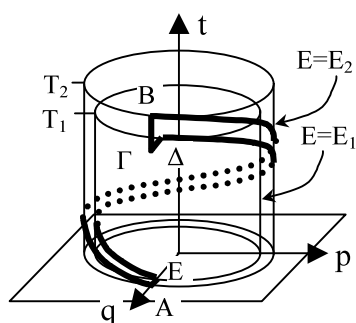
$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} p dq - \int_{t_1}^{t_2} H dt$$



Προφανώς η συνάρτηση αυτή θα εξαρτάται μόνο από το αρχικό και το τελικό σημείο αφού η σύνδεσή τους γίνεται αυτόματα με κάποια φυσική διαδρομή. Μια μικρή μετατόπιση του αρχικού και του τελικού σημείου στον θεσεογραφικό χώρο θα προκαλέσει αντίστοιχη μεταβολή της δράσης ίση με

$$dS = p_2 dq_2 - p_1 dq_1 - H_2 dt_2 + H_1 dt_1,$$

όπου οι τιμές των p , H είναι αυτές στα αντίστοιχα άκρα.



Όντας τέλει διαφορικό, η δράση θα πρέπει να έχει $\oint dS = 0$ κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής στον θεσεογραφικό χώρο, υπολογίζοντας πιθανώς και διαδρομές που διαγράφονται αντίστροφα στον χρόνο. Θεωρήστε για παράδειγμα μια μονοδιάστατη περιοδική κίνηση η οποία έχει περίοδο T_2 ή T_1 όταν η ενέργεια του συστήματος είναι E_2 ή E_1 αντίστοιχα, με E_2 παραπλήσια της E_1 .

Θα ακολουθήσουμε την εξέλιξη του συστήματος στο χώρο q, p, t , αρχικά για μια περίοδο μέχρι το σύστημα να επανέλθει στην αρχική του θέση στο χώρο των φάσεων, και στη συνέχεια αφού εκτελέσουμε ένα μικρό ενεργειακό άλμα, θα παρακολουθήσουμε το σύστημα να προχωρά αντίστροφα στο χρόνο, πάλι για μια περίοδο, και τέλος με άλλο ένα μικρό άλμα επιστροφής στην αρχική ενέργεια θα επανέλθουμε στο αρχικό σημείο της διαδρομής από το οποίο ξεκινήσαμε (βλ. σχήμα). Τα δύο ενεργειακά άλματα τα εκτελούμε στο επίπεδο $p = 0$ όπου θα θεωρήσουμε ότι συμβαίνει η έναρξη ή η λήξη της εκάστοτε περιοδικής κίνησης. Τότε το ολοκλήρωμα της δράσης κατά μήκος της κλειστής διαδρομής ABΓΔΕΑ θα είναι μηδενικό και τα επιμέρους ολοκληρώματα θα έχουν τιμή:

$$\int_{AB} p dq = \text{εμβαδόν}(E_2), \int_{\Delta E} p dq = -\text{εμβαδόν}(E_1), \int_{\Gamma \Delta} p dq = \int_{EA} p dq = \int_{B\Gamma} p dq = 0 \text{ (αφού } p = 0),$$

$$\int_{AB} H dt = E_2 T_2, \int_{\Delta E} H dt = -E_1 T_1, \int_{\Gamma \Delta} H dt = \int_{EA} H dt = 0 \text{ (αφού } t = \text{σταθ)}, \int_{B\Gamma} H dt = E_2 (T_1 - T_2)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \text{εμβαδόν}(E_2) - \text{εμβαδόν}(E_1) &= E_2 T_2 - E_1 T_1 + E_2 (T_1 - T_2) \Rightarrow \\ \frac{\text{εμβαδόν}(E_2) - \text{εμβαδόν}(E_1)}{E_2 - E_1} &= T_1 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει με διαφορετικό τρόπο το θεώρημα που είδαμε στο πρώτο εξάμηνο, σύμφωνα με το οποίο η περίοδος μιας περιοδικής μονοδιάστατης κίνησης ισούται με τον ρυθμό αύξησης του εμβαδού που περικλείει η αντίστοιχη κλειστή καμπύλη στο χώρο των φάσεων με την ενέργεια.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι η τελική έκφραση στην οποία καταλήξαμε είναι παραπλανητική. Ενώ φαίνεται ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικά, όχι μόνο για διαφορικές αλλαγές στην ενέργεια, ο ανωτέρω υπολογισμός είναι ορθός *μόνο* για διαφορικά άλματα στην ενέργεια. Ο λόγος είναι ότι αν τα άλματα αυτά που περιγράφονται από τις διαδρομές BΓ, ΓΔ και EA δεν είναι απειροστά, οι ευθύγραμμες αυτές διαδρομές δεν είναι φυσικές τροχιές του συστήματος και επομένως ο υπολογισμός μεταβολής της δράσης κατά μήκος αυτών δεν είναι τόσο άμεσος.