

Μηχανική II

Σημειακοί μετασχηματισμοί

Μέχρι τώρα έχουμε περιγράψει τα μηχανικά συστήματα με Λαγκρανζιανές συναρτήσεις της θέσης και της ταχύτητας αυτών, οι οποίες με τη σειρά τους είναι υπολογισμένες σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Η φυσική κίνηση του συστήματος προκύπτει τότε από τη λύση των δυναμικών εξισώσεων Euler-Lagrange σε αυτές τις συντεταγμένες. Είδαμε ότι όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι οι ίδιες με τις εξισώσεις του Νεύτωνα σύμφωνα με τις οποίες η επιτάχυνση συνδέεται με τη δύναμη με το γνωστό δυναμικό νόμο: $\vec{F} = m\vec{a}$. Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε τι θα συμβεί αν αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων επιλέξουμε άλλες συντεταγμένες, π.χ. πολικές, σφαιρικές ή κάποιες άλλες γενικότερες συντεταγμένες. Σε αυτή την περίπτωση η ισοδυναμία των εξισώσεων Euler-Lagrange με τις εξισώσεις του Νεύτωνα δεν είναι προφανής.

Έστω ένα φυσικό σύστημα το οποίο διέπεται από τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση $L(x, \dot{x}, t)$ —όπου το x , και αντίστοιχα το $\dot{x}$, μπορεί να συμβολίζει ένα ολόκληρο πλήθος από συντεταγμένες που απαιτούνται για τον καθορισμό της θέσης του συστήματος. Θεωρούμε τώρα νέες συντεταγμένες q —τόσες όσες και οι x — οι οποίες συνδέονται με τις αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων $q = q(x, t)$. Οι νέες συντεταγμένες προκύπτουν από τις αρχικές με ένα σημειακό μετασχηματισμό, δηλαδή ένα μετασχηματισμό σημείο προς σημείο. Θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι αντιστρέψιμος (κάθε σημείο στις αρχικές συντεταγμένες αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό σύνολο τιμών των καινούριων συντεταγμένων), οπότε μπορούμε να γράψουμε τις αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των νέων ως $x = x(q, t)$.

Έχετε ήδη εργασθεί με σημειακούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα στην κίνηση ενός σώματος σε κεντρικό πεδίο έχουμε δει ότι είναι προτιμότερο να επιλεγούν πολικές συντεταγμένες για τη περιγραφή της κίνησης. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε το χρονοανεξάρτητο σημειακό μετασχηματισμό από τις συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) στις πολικές (r, θ) : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Οι

εξισώσεις του Νεύτωνα στις καρτεσιανές συντεταγμένες έχουν τη γνώριμη μορφή: $m\ddot{x} = F_x$, $m\ddot{y} = F_y$, όπου (F_x, F_y) οι συνισταμένες της κεντρικής δύναμης στους άξονες (x, y) αντιστοίχως. Στις πολικές συντεταγμένες όμως οι εξισώσεις του Νεύτωνα μετασχηματίζονται και λαμβάνουν τη μορφή: $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$, $m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$, όπου F_r η κεντρική δύναμη. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι οι εξισώσεις του Νεύτωνα αλλάζουν μορφή όταν μεταφερόμαστε σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή οι εξισώσεις του Νεύτωνα δεν έχουν αναλλοίωτη μορφή στους σημειακούς μετασχηματισμούς. Τι συμβαίνει με τις εξισώσεις Euler-Lagrange; Αυτές είναι αναλλοίωτες στους σημειακούς μετασχηματισμούς;

Έχοντας αποδεχθεί το γεγονός ότι η φυσική κίνηση αντιστοιχεί σε εκείνη τη διαδρομή στο θεσεογραφικό χώρο για την οποία η δράση καθίσταται στάσιμη, και συνεπώς η διαδρομή αυτή ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange, τότε είναι προφανές ότι αν η δράση καθίσταται στάσιμη για τη διαδρομή $x(t)$ θα καθίσταται στάσιμη και για τη ίδια διαδρομή εκπεφρασμένη στις συντεταγμένες q δηλαδή τη διαδρομή $q(x(t), t)$. Συνεπώς, επειδή η $x(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

τότε και η $q(x(t), t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0,$$

όπου τώρα η Λαγκρανζιανή $L'(q, \dot{q}, t)$ που διέπει τη δυναμική στις νέες συντεταγμένες είναι η αρχική Λαγκρανζιανή $L(x, \dot{x}, t)$ εκφρασμένη στις νέες συντεταγμένες q . Και αυτό ισχύει διότι η δράση είναι:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L \left(x(q, t), \frac{\partial x(q, t)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x(q, t)}{\partial t}, t \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt,$$

όπου ορίσαμε τη Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες ως:

$$L'(q, \dot{q}, t) \equiv L \left(x(q, t), \frac{\partial x(q, t)}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x(q, t)}{\partial t}, t \right).$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange, αντιθέτως με τις εξισώσεις του Νεύτωνα, είναι αναλλοίωτες στους σημειακούς μετασχηματισμούς. Η παραπάνω πρόταση μπορεί να αποδειχθεί, αρκετά πιο επίπονα, εκτελώντας συστηματικά τις παραγωγίσεις των εξισώσεων Euler-Lagrange στην καινούρια Λαγκρανζιανή L' (βλ. Β' σειρά ασκήσεων).

Αν λοιπόν το μηχανικό σύστημα περιγράφεται σε ένα καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα από τη Λαγκρανζιανή $L = T - V$, όπου T η κινητική ενέργεια του συστήματος και V η δυναμική ενέργεια του συστήματος τότε σε οποιεσδήποτε άλλες συντεταγμένες η δυναμική του συστήματος θα περιγράφεται και πάλι με τη Λαγκρανζιανή $L = T - V$, όπου τώρα η κινητική και η δυναμική ενέργεια είναι εκπεφρασμένες στις νέες συντεταγμένες (τυπικά θα είναι μια νέα συνάρτηση L' των νέων συντεταγμένων). Π.χ. ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται στο χώρο. Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει τη δυναμική του σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι ίση τότε με την κινητική ενέργεια του σωματιδίου: $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Αν

όμως επιλέξουμε ως συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, z) τότε επειδή $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, βρίσκουμε ότι $\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$ και $\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$ και συνεπώς η κινητική ενέργεια και η Λαγκρανζιανή που διέπει τη δυναμική του σωματιδίου θα είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$. Η κίνηση του σωματιδίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες μπορούν αμέσως να γραφούν από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{ή} \quad m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) = 0$$

$$\text{και } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \text{ ή } m\ddot{z} = 0.$$

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ένα τέχνασμα του Landau για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

Επειδή η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}mu^2$, όπου u το μέτρο της ταχύτητας, τότε

$$u^2 = \frac{(ds)^2}{(dt)^2}, \text{ όπου το } ds \text{ είναι η διαφορική απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Συνεπώς}$$

για να υπολογίσουμε τη κινητική ενέργεια σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων αρκεί να υπολογίσουμε το τετράγωνο της διαφορικής απόστασης μεταξύ δύο σημείων στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Π.χ. σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το τετράγωνο της διαφορικής απόστασης μεταξύ των σημείων (x, y, z) και $(x + dx, y + dy, z + dz)$ είναι, κάνοντας χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ και συνεπώς το τετράγωνο της ταχύτητας

$$\text{είναι } u^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \text{ και έτσι η κινητική ενέργεια}$$

λαμβάνει τη γνώριμη μορφή. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι εύκολο να δει κανείς ότι η διαφορική απόσταση μεταξύ των σημείων (r, θ, z) και $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$ είναι $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2$ οπότε το τετράγωνο της

$$\text{ταχύτητας είναι } u^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2. \text{ Δοκιμάστε να}$$

υπολογίσετε με τον τρόπο αυτό την κινητική ενέργεια σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) όπου θ είναι η πολική γωνία και ϕ η αζιμουθιακή γωνία.

[Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι $u^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2$]. Αφού έχει υπολογισθεί η Λαγκρανζιανή συνάρτηση σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες είναι εύκολο στη συνέχεια από τις εξισώσεις Euler-Lagrange να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες.