Τμήμα Π. Ιωάννου &
Θ. Αποστολάτου
3/2001

Μηχανική ΙΙ

Λαγκρανζιανή συνάρτηση

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα είναι ισοδύναμος με την απαίτηση η δράση, ως το ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής στο χρόνο, να καθίσταται στάσιμη. Το όλο πρόβλημα διερεύνησης της εξέλιξης λοιπόν ενός μηχανικού συστήματος συνίσταται στη γραφή της Λαγκρανζιανής του συνάρτησης. Η επίλυση των εξισώσεων Euler-Lagrange στη συνέχεια, είναι ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα, πολλές φορές δυσεπίλυτο. Όλη η «φυσική» του προβλήματος βρίσκεται συμπυκνωμένη μέσα στη συνάρτηση Λαγκράνζ και όχι μόνο. Η συνάρτηση Λαγκράνζ κρύβει επίσης κάθε συμμετρία του προβλήματος, την οποία, όπως θα δούμε, μπορούμε εύκολα να αποκαλύψουμε.

Μέχρι τώρα, μάθαμε ότι η κατάλληλη επιλογή για τη συνάρτηση Λαγκράνζ ενός μηχανικού συστήματος είναι η κινητική μείον τη δυναμική του ενέργεια. Έχουμε ήδη συζητήσει την ***α***καταλληλότητα της Λαγκρανζιανής περιγραφής συστημάτων με ανάλωση (όπου εμφανίζονται μη συντηρητικές δυνάμεις), αν και, όπως είπαμε, αυτό δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα, αφού σε θεμελιώδες επίπεδο όλες οι δυνάμεις στη φύση είναι συντηρητικές. Αργότερα θα μάθουμε να γράφουμε και τη Λαγκρανζιανή συστημάτων όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ σωματίων εξαρτάται όχι μόνο από τη θέση τους αλλά και από την ταχύτητά τους (π.χ. ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις). Προς το παρόν θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της Λαγκρανζιανής συνάρτησης καθώς και τους μετασχηματισμούς αυτής που δεν αλλοιώνουν την περιγραφή του μηχανικού συστήματος.

(1) Αν πολλαπλασιάσουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός μηχανικού συστήματος με έναν αριθμό, η νέα αυτή Λαγκρανζιανή θα περιγράφει και πάλι το ίδιο μηχανικό σύστημα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι εξισώσεις κίνησης θα είναι οι ίδιες αφού οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις παραγώγων της Λαγκρανζιανής. Εξ' άλλου πολλαπλασιάζοντας τη Λαγκρανζιανή με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζεται και η δράση με τον ίδιο αριθμό δίχως όμως να αλλάζει το ακρότατο της τελευταίας: Η διαδρομή που καθιστά την αρχική δράση στάσιμη έχει το ίδιο αποτέλεσμα και στην καινούρια δράση (όπως ακριβώς μια συνάρτηση $f(x)$ και η $\lambda f(x)$ παρουσιάζουν στα ίδια σημεία ακρότατα).

(2) Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος σωμάτων τα οποία είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (π.χ. δύο σωματίδια που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους) είναι απλά το άθροισμα των επί μέρους Λαγκρανζιανών του κάθε σώματος. Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει, να εκφράσουμε τη Λαγκρανζιανή ενός συνθέτου συστήματος που αποτελείται από υποσυστήματα τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ως το άθροισμα των Λαγκρανζιανών των επί μέρους συστημάτων. Πολλές φορές αυτός ο διαχωρισμός της Λακρανζιανής δεν είναι προφανής. Όταν υπάρχει κάποιος μετασχηματισμός των συντεταγμένων τέτοιος ώστε να μπορεί η Λαγκρανζιανή να γραφεί ως άθροισμα ανεξάρτητων Λαγκρανζιανών τότε αποκαλύπτεται η απλούστερη δομή του συστήματος. Θα δούμε αργότερα ότι η ιδιότητα αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να αναλύσουμε ένα οσοδήποτε πολύπλοκο μηχανικό πρόβλημα το

οποίο βρίσκεται σε κάποια κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας ως άθροισμα ανεξάρτητων αρμονικών ταλαντωτών.

Ας εξετάσουμε ένα σχετικό παράδειγμα διάσπασης μιας Λαγκρανζιανής. Δύο σωμάτια μάζας m_1 και m_2 κινούνται σε μία διάσταση υπό την επίδραση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης που περιγράφεται από το δυναμικό $V(|x_1 - x_2|)$. Το δυναμικό αυτό λέγεται δυναμικό νευτώνειου τύπου, διότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των σωματίων είναι ίσες και αντίθετες και ασκούνται στη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα δύο σωμάτια[1]. Είναι εύκολο να γράψει κανείς την Λαγκρανζιανή του συστήματος των δύο σωματίων:

$$L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 - V(|x_1 - x_2|).$$

Στις φυσικές αυτές συντεταγμένες x_1, x_2 η Λαγκρανζιανή δεν είναι διαχωρίσιμη, αφού το δυναμικό αλληλοεμπλέκει και τις δύο. Αν όμως χρησιμοποιούσαμε ως συντεταγμένες για την περιγραφή του συστήματος τη θέση του κέντρου μάζας $X \equiv (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$ και τη σχετική θέση των σωματίων $x \equiv x_1 - x_2$, είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς με απλή αντικατάσταση ότι η Λαγκρανζιανή παίρνει τώρα την διαχωρίσιμη μορφή:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 - V(|x|),$$

όπου $M = m_1 + m_2$ η ολική μάζα και $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ η ανηγμένη μάζα.

Την τελευταία αυτή μορφή την αναμέναμε, αφού ήδη γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις νευτώνειου τύπου (που υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα) κινείται αφενός μεν ως σύνολο, ως ένα ελεύθερο σώμα μάζας ίσης με την ολική μάζα του συστήματος το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας του συστήματος (πρώτος όρος της Λαγκρανζιανής) και αφετέρου, η σχετική κίνηση των δύο σωματίων είναι αυτή ενός σώματος μάζας ίσης με την ανηγμένη μάζα του συστήματος που κινείται στο δυναμικό αλληλεπίδρασης που τώρα όμως φαίνεται να προέρχεται από κάποια εξωτερική πηγή (τελευταίοι δύο όροι της Λαγκρανζιανής). Με την νέα αυτή μορφή της Λαγκρανζιανής είναι εύκολο να δει κάποιος ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίδουν την ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας και τη σχετική κίνηση της ανηγμένης μάζας στο εξωτερικό δυναμικό αλληλεπίδρασης.

(3) Αν προσθέσουμε στη Λαγκρανζιανή συνάρτηση μια άλλη συνάρτηση η οποία αποτελεί τέλεια χρονική παράγωγο κάποιας συνάρτησης των θέσεων και του χρόνου,

$$\widetilde{L} = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q,t)}{dt}$$ [2]

η καινούρια αυτή συνάρτηση περιγράφει και πάλι το ίδιο μηχανικό σύστημα. Μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η παραπάνω πρόταση ισχύει υπολογίζοντας προσεκτικά τις εξισώσεις Euler-Lagrange που προκύπτουν από τη νέα Λαγκρανζιανή και καταλήγοντας στις αντίστοιχες εξισώσεις της αρχικής Λαγκρανζιανής (βλ. φυλλάδιο ασκήσεων Β΄). Ο απλούστερος όμως τρόπος να αποδείξετε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις κίνησης και να καταλάβετε το

[1] Γιατί χρησιμοποιείται η απόλυτη τιμή; Τι θα συνέβαινε αν το δυναμικό αλληλεπίδρασης ήταν π.χ. $V = \vec{a} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$; Ή σε μία διάσταση ήταν απλώς $V = x_1 - x_2$;

[2] Με τον συμβολικό όρο q εννοούμε όχι κατ' ανάγκη μία μόνο συντεταγμένη θέσης, αλλά γενικά ένα σύνολο συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots$ και αντίστοιχα με $\dot{q}$ εννοούμε την παράγωγο όλων αυτών.

βαθύτερο νόημα αυτού του μετασχηματισμού είναι να υπολογίσετε τη δράση που προκύπτει από την καινούρια Λαγκρανζιανή.

$$\widetilde{S} = \int_{t_A}^{t_B} \widetilde{L}dt = \int_{t_A}^{t_B} Ldt + f(q,t)\Big|_{t_A}^{t_B} = S + f\big(q(t_B),t_B\big) - f\big(q(t_A),t_A\big).$$

Οι τελευταίοι δύο όροι της παραπάνω παράστασης είναι κάποιοι καθορισμένοι αριθμοί αφού το αρχικό και τελικό σημείο της διαδρομής κατά την εφαρμογή της αρχής ελάχιστης δράσης θεωρούνται δεδομένα. Επομένως η εύρεση ακροτάτου της $\widetilde{S}$ δεν εξαρτάται από τη συνάρτηση f · είναι το ίδιο με το ακρότατο της *S*. Ο μετασχηματισμός αυτός ο οποίος αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής, αφήνοντας αναλλοίωτες τις εξισώσεις Euler-Lagrange ονομάζεται *gauge transformation* (στα ελληνικά έχει αποδοθεί με τον όρο *μετασχηματισμός βαθμίδας*, ίσως όμως πιο σωστά θα έπρεπε να λέγεται *μετασχηματισμός βαθμονόμησης*). Ουσιαστικά ο μετασχηματισμός αυτός είναι σαν να αναβαθμονομεί κανείς την τιμή της δράσης κατά μήκος του άξονα του χρόνου ανεξαρτήτως της διαδρομής -εξ ου και ο όρος-, όπως αν αναβαθμονομούσε κανείς το όργανο ελέγχου της βενζίνης ενός αυτοκινήτου θα γνώριζε και πάλι πότε τελειώνει η βενζίνη. Μετασχηματισμούς βαθμονόμησης συναντά κανείς πολύ συχνά στη φυσική, όταν υπάρχει κάποια ελευθερία στον καθορισμό ενός μεγέθους δίχως να αλλάζει το φυσικό περιεχόμενο του προβλήματος. Παράδειγμα τέτοιου μετασχηματισμού που έχουμε ήδη συναντήσει είναι η αυθαίρετη επιλογή του σημείου που θεωρεί κανείς ότι η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται· αυτό που έχει σημασία είναι ο τρόπος που μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια και όχι η απόλυτη τιμή αυτής.

Κατασκευή της Λαγκρανζιανής απομονωμένου συστήματος σωματίων από τις συμμετρίες του φυσικού κόσμου

Η βαθύτερη προέλευση της Λαγκρανζιανής συνάρτησης θα φανεί ακολούθως όπου θα κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση του ελευθέρου σωματιδίου στηριζόμενοι αποκλειστικά[3] στις συμμετρίες του χώρου και του χρόνου. Πράγματι, ας ξεκινήσουμε με κάποια γενική Λαγκρανζιανή συνάρτηση για το ελεύθερο σωμάτιο της μορφής $L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$. Λόγω ομογένειας του χρόνου δεν είναι δυνατόν η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου να εξαρτάται από το χρόνο (οποιαδήποτε χρονική στιγμή η Λαγκρανζιανή πρέπει να είναι η ίδια). Επομένως πρέπει να έχει την απλούστερη μορφή $L(\vec{x},\dot{\vec{x}})$. Αντιστοίχως λόγω ομογένειας του χώρου δεν είναι δυνατόν να εξαρτάται ούτε από τη θέση του σωματιδίου (όπου και αν βρίσκεται το ελεύθερο σωμάτιο πρέπει να περιγράφεται από την ίδια Λαγκρανζιανή συνάρτηση). Επομένως η μορφή αυτής πρέπει να είναι ακόμη πιο απλή: $L(\dot{\vec{x}})$. Η ισοτροπία του χώρου, η ανεξαρτησία δηλαδή της περιγραφής από οποιαδήποτε κατεύθυνση, επιβάλλει ακόμη πιο στενό περιορισμό της Λαγκρανζιανής συνάρτησης του ελευθέρου σωματίου $L\left(\left|\dot{\vec{x}}\right|^2\right)$. Τέλος η γαλιλαϊκή συμμετρία, η συμμετρία

[3] Στην πραγματικότητα κάνουμε άλλη μια παραδοχή, ότι δηλαδή η Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων και των χρονικών παραγώγων τους (και εν γένει του χρόνου), όχι όμως ανώτερων παραγώγων. Αυτό είναι αποκλειστικά πειραματικό αποτέλεσμα αφού έχουμε διαπιστώσει ότι η αρχική θέση και η ταχύτητα ενός συστήματος καθορίζουν πλήρως την εξέλιξή του.

περιγραφής του συστήματος δηλαδή σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα, επιβάλει το φυσικό περιεχόμενο της Λαγκρανζιανής να μην αλλάζει όταν η κίνηση του σωματιδίου περιγραφεί από κάποιο άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Θα πρέπει λοιπόν η αλλαγή $\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t$ ($\vec{V}$ η σχετική ταχύτητα κίνησης των δύο αδρανειακών συστημάτων, του αρχικού και του καινούριου) να επιφέρει το πολύ ένα μετασχηματισμό βαθμονόμησης στη Λαγκρανζιανή, δηλαδή:

$$L\left(\left|\dot{\vec{x}}'\right|^2\right) = L\left(\left|\dot{\vec{x}}\right|^2\right) + \frac{df(\vec{x},t)}{dt}.$$

Όμως $L\left(\left|\dot{\vec{x}}'\right|^2\right) = L\left(\left|\dot{\vec{x}} - \vec{V}\right|^2\right) = L\left((\dot{\vec{x}})^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{V}\cdot\dot{\vec{x}}\right)$. Προσέξτε ότι οι δύο τελευταίοι όροι στο όρισμα της συνάρτησης αποτελούν μια τέλεια χρονική παράγωγο: $\vec{V}^2 - 2\vec{V}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}^2 t - 2\vec{V}\cdot\vec{x}\right)$, επομένως θέλουμε μια συνάρτηση $L(u^2)$ για την οποία να ισχύει $L\left(u^2 + \frac{dg}{dt}\right) = L(u^2) + \frac{df}{dt}$, όπου *g* μια δεδομένη συνάρτηση και *f* μια τυχαία συνάρτηση. Φαίνεται αμέσως ότι μια τέτοια κατάλληλη συνάρτηση είναι η $L(u^2) = au^2 + b$. [Απόδειξη: Το ότι μια τέτοια τύπου συνάρτηση είναι η μοναδική που μπορούμε να κατασκευάσουμε για την οποία να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα δείχνεται εύκολα αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση *g* είναι καταλλήλως μικρή (επιλέγοντας μικρή σχετική ταχύτητα $\vec{V}$), πολλαπλασιάζοντάς την με κάποιο μικρό αριθμό *ε* και αναπτύσσοντας την *L* σε όρους μέχρι τάξης *ε*.

$$L\left(u^2 + \varepsilon\frac{dg}{dt}\right) = L\left(u^2\right) + \varepsilon \left.\frac{dL(y)}{dy}\right|_{u=u^2} \frac{dg}{dt} = L(u) + \varepsilon\frac{dL(u^2)}{du^2}\frac{dg}{dt}$$

Για να είναι ο τελευταίος όρος μια τέλεια χρονική παράγωγος πρέπει $\frac{dL}{du^2} = a$, δηλαδή $L = au^2 + b$.]

Συνοπτικά η Λαγκρανζιανή ενός ελευθέρου σωματίου σε ένα κόσμο που παρουσιάζει όλες τις παραπάνω συμμετρίες πρέπει να έχει τη μορφή:

$$L_{\varepsilon\lambda.\sigma\omega\mu.} = \frac{1}{2}m\,|\,\dot{\vec{x}}\,|^2$$

η προσθετική σταθερά *b* αφαιρέθηκε ως μη έχουσα φυσική σημασία (μετασχηματισμός βαθμονόμησης) και η σταθερά *α* απλώς γράφηκε με τη μορφή ½ *m*. Η επιλογή είναι εντελώς αυθαίρετη, εξάλλου οποιοσδήποτε πολλαπλασιαστικός παράγοντας θα ήταν ικανοποιητικός. Από την άλλη πρόκειται για μια λογική επιλογή αφού η μοναδική ιδιότητα ενός υλικού σωματιδίου που το διακρίνει από άλλα είναι στην κλασσική φυσική μονάχα η μάζα του. Όσο για το ½ είναι και αυτό αυθαίρετο και έχει επιλεχθεί ώστε να μας θυμίζει τη γνωστή κινητική ενέργεια.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σωμάτια που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η συνολική Λαγκρανζιανή είναι το άθροισμα των Λαγκρανζιανών των σωματίων,

$$L = \frac{1}{2}m_1\,|\,\dot{\vec{x}}_1\,|^2 + \frac{1}{2}m_2\,|\,\dot{\vec{x}}_2\,|^2,$$

όπου $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ η θέση των σωματίων. Έστω, τώρα ότι τα δύο σωμάτια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στο όριο που η αλληλεπίδραση είναι αμελητέα η ολική Λαγκρανζιανή πρέπει να τείνει στη παραπάνω Λαγκρανζιανή, οπότε η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματίων, η οποία εξαρτάται από τις συντεταγμένες και τις ταχύτητες και των δύο σωματίων θα πρέπει να εμφανίζεται προσθετικά:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \,|\, \dot{\vec{x}}_1 \,|^2 + \frac{1}{2} m_2 \,|\, \dot{\vec{x}}_2 \,|^2 + L_I(\vec{x}_1, \dot{\vec{x}}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_2, t) .$$

Τι μορφή μπορεί να έχει η L_I; Δεν μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο, διότι οι φυσικοί νόμοι έχουν υποτεθεί αναλλοίωτοι σε χρονικές μεταθέσεις. Θα πρέπει να εξαρτάται από τη σχετική θέση και ταχύτητα των σωματίων ώστε οι φυσικοί νόμοι να είναι συμμετρικοί ως προς τις μεταθέσεις (ομογενείς στο χώρο) και να ικανοποιούν την γαλιλαϊκή συμμετρία. Συνεπώς η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης πρέπει να είναι της μορφής $L_I(\Delta\vec{x}, \Delta\vec{v})$, όπου $\Delta\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ η σχετική θέση των σωματίων, και $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Τέλος η Λαγκρανζιανή πρέπει να είναι αναλλοίωτη στις στροφές. και συνεπώς εξαρτάται μόνο από τις βαθμωτές μεταβλητές που μπορούν να κατασκευασθούν από τα $\Delta\vec{x}, \Delta\vec{v}$. Αυτές είναι οι: $|\,\Delta\vec{x}\,|^2$, $|\,\Delta\vec{v}\,|^2$, $\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{v}$ και τέλος η $|\,\Delta\vec{x} \times \Delta\vec{v}\,|^2$. Δεν συμπεριλάβαμε ποσότητες της μορφής $\vec{a} \cdot \Delta\vec{x}$, διότι αυτό θα σήμαινε ότι στον φυσικό κόσμο υπάρχουν ορισμένες διακεκριμένες κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από το διάνυσμα $\vec{a}$. Συνεπώς η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης που ικανοποιεί τις ευκλείδειες συμμετρίες (ομογένεια του χώρου, ισοτροπία), τη γαλιλαϊκή συμμετρία και την ομογένεια του χρόνου πρέπει να είναι της μορφής:

$$L_I\Big(|\,\vec{x}_1 - \vec{x}_2\,|, |\,\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2\,|, (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\cdot(\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2), |\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\times(\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2)\,|\Big).$$

Στη κατασκευή της Λαγκρανζιανής αλληλεπίδρασης έχουμε υποθέσει ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματίων είναι ακαριαίες διότι η αλλαγή της θέσης ή της ταχύτητας ενός σωματίου ακαριαία επηρεάζει το άλλο σωμάτιο. Στην κλασική μηχανική η παραδοχή ότι ο χρόνος είναι απόλυτος (ίδιος σε όλα τα συστήματα αναφοράς) και η αρχή της γαλιλαϊκής σχετικότητας απαιτούν οι αλληλεπιδράσεις να είναι ακαριαίες. Διότι εάν οι αλληλεπιδράσεις διαδίδονταν με κάποια πεπερασμένη ταχύτητα, αυτή η ταχύτητα θα ήταν διαφορετική σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, και με τον τρόπο αυτό θα μπορούσε κάποιος να προσδιορίσει την ταχύτητα κίνησής του απολύτως, σε αντίθεση με την αρχή της σχετικότητας.

Ο Νεύτων με τον τρίτο νόμο του περιορίζει την εξάρτηση της Λαγκρανζιανής αλληλεπίδρασης μόνο από τη σχετική θέση των σωματίων, οπότε η Λακγρανζιανή δύο αλληλεπιδρόντων σωματίων έχει τη μορφή:

$$. \; L = \frac{1}{2} m_1 \,|\, \dot{\vec{x}}_1 \,|^2 + \frac{1}{2} m_1 \,|\, \dot{\vec{x}}_2 \,|^2 - V(|\,\vec{x}_1 - \vec{x}_2\,|) .$$

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε ότι η Λαγκρανζιανή ενός απομονωμένου συστήματος *n* σωματίων (στα οποία δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη) θα είναι της μορφής

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \,|\, \dot{\vec{x}}_i \,|^2 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\,\vec{x}_i - \vec{x}_j\,|) ,$$

όπου το $1/2$ έχει συμπεριληφθεί, έτσι ώστε τα δυναμικά της αλληλεπίδρασης να λαμβάνονται μόνο μία φορά.