

# 1 Κανονικοί μετασχηματισμοί

Εστω ότι μετασχηματίζουμε τις συντεταγμένες  $(q, p)$  σε  $Q = Q(q, p)$ ,  $P = P(q, p)$ . Αυτός ο μετασχηματισμός είναι πολύ πιο γενικός από τους σημειακούς μετασχηματισμούς που συναντήσαμε στη λαγκρανζιανή θεώρηση. Δεν είναι όμως ο πιο γενικός, θα μπορούσε να εξαρτάται ο μετασχηματισμός και από τον χρόνο.

Στη περίπτωση της λαγκρανζιανής θεώρησης δείξαμε ότι οι πιο γενικοί σημειακοί μετασχηματισμοί  $Q = Q(q, t)$ , αφήνουν τις εξισώσεις Euler-Lagrange αναλλοίωτες. Δεδομένου ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις του Χάμιλτον αναμένουμε οι σημειακοί μετασχηματισμοί να αφήνουν και τη χαμιλτονιανή δυναμική αναλλοίωτη. Δηλαδή η δυναμική στις νέες συντεταγμένες  $Q, P$  να εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον αν στις αρχικές συντεταγμένες εξελίσσονταν χαμιλτονιανά. Παρατηρείστε ότι ο μετασχηματισμός  $Q = Q(q, t)$  επιβάλλει τον μετασχηματισμό  $P(q, p, t)$ . Διότι είναι:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial \bar{L}(Q_a, \dot{Q}_a, t)}{\partial \dot{Q}_i} \\ &= \frac{\partial L(q_a(Q, t), (\partial q_a / \partial Q_b) \dot{Q}_b + \partial q_a / \partial t, t)}{\partial \dot{Q}_i} \\ &= \frac{\partial q_a}{\partial Q_i} p_a, \end{aligned}$$

όπου  $\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), dq(Q, t)/dt, t)$ , δηλαδή είναι η αρχική Λαγκρανζιανή εκπεφρασμένη στις νέες συντεταγμένες.

Στη χαμιλτονιανή δυναμική οι θέσεις και οι ορμές έχουν ανεξάρτητη υπόσταση και έτσι μπορεί να προκύψουν ανεξάρτητοι μετασχηματισμοί και των θέσεων και των ορμών. Σε αυτή τη περίπτωση δεν είναι αναγκαίο η δυναμική στις νέες συντεταγμένες να είναι χαμιλτονιανή. Το απλούστερο παράδειγμα μετασχηματισμού των θέσεων και των ορμών που δεν διατηρεί τη χαμιλτονιανή δυναμική στις νέες συντεταγμένες είναι η εναλλαγή θέσεων και ορμών:

$$Q = p, P = q.$$

Στον μετασχηματισμό αυτό η χαμιλτονιανή εξίσωση των αρχικών θέσεων

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$\dot{P} = \frac{\partial H}{\partial Q},$$

η οποία δεν είναι χαμιλτονιανή. Ομοίως η χρονική εξέλιξη των νέων θέσεων,  $Q$ , δεν είναι χαμιλτονιανή. Αν όμως, κάναμε το μετασχηματισμό:

$$Q = -p, P = q,$$

τότε η δυναμική θα παρέμενε χαμιλτονιανή στις νέες συντεταγμένες. Οι μετασχηματισμοί αυτοί των θέσεων και των ορμών που ορίζουν νέες συντεταγμένες θέσεων και ορμών που εξελίσσονται με χαμιλτονιανή δυναμική αν οι αρχικές συντεταγμένες εξελίσσονταν χαμιλτονιανά, λέγονται κανονικοί μετασχηματισμοί.

Θα εξετάσουμε τι συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι ένας μετασχηματισμός κανονικός.

Εστω ότι η δυναμική στις αρχικές συντεταγμένες  $(q, p)$  εξελίσσεται με τη χαμιλτονιανή συνάρτηση  $H(q, p, t)$ . Υπολογίζουμε την χρονική εξέλιξη της μεταβλητής  $Q_i$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \{Q_i, H\} \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_k} &= \frac{\partial \bar{H}(Q, P, t)}{\partial p_k} \\ &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a}{\partial p_k} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_a} \frac{\partial P_a}{\partial p_k},\end{aligned}$$

όπου η Χαμιλτονιανή  $\bar{H}(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P), t)$  λαμβάνει τις ίδιες τιμές με την αρχική Χαμιλτονιανή σε κάθε σημείο του χώρου  $(q, p)$ . Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_k} &= \frac{\partial \bar{H}(Q, P, t)}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a}{\partial q_k} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_a} \frac{\partial P_a}{\partial q_k}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στο  $\dot{Q}_i$  προκύπτει ότι:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \{Q_i, Q_k\} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \{Q_i, P_k\}$$

Όμοίως,

$$\dot{P}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k} \{P_i, Q_k\} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k} \{P_i, P_k\}.$$

Συνεπώς αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η δυναμική χαμιλτονιανή στις νέες συντεταγμένες είναι οι αγκύλες των νέων συντεταγμένων να είναι κανονικές, δηλαδή να ισχύει:

$$\{Q_i, Q_k\} = \{P_i, P_k\} = 0, \quad \{Q_i, P_k\} = \delta_{ik}.$$

Είδαμε ότι όταν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, η τιμή της αγκύλης δύο δυναμικών μεταδλητών είναι ίδια για όλες τις κανονικές συντεταγμένες. Είναι δηλαδή:

$$\{f, g\}_{Q, P} = \{f, g\}_{q, p}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι ο σημειακός μετασχηματισμός της λαγκραντζιανής θεώρησης  $Q = Q(q, t)$  που συνεπάγεται τον μετασχηματισμό των ορμών:

$$P_i = \frac{\partial q_a}{\partial Q_i} p_a$$

είναι κανονικός. Αρκεί να δειχθεί ότι οι συντεταγμένες  $(Q, P)$  είναι κανονικές. Είναι άμεσο να δείξει κανείς επειδή τα  $Q$  δεν εξαρτώνται από τα  $p$  ότι είναι  $\{Q_i, Q_j\} = 0$ . Τώρα:

$$\begin{aligned}\{Q_i, P_j\} &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \\ &= \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} \\ &= \delta_{ij},\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\{P_i, P_j\} &= \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \\ &= \frac{\partial^2 q_a}{\partial Q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} p_a - \frac{\partial^2 q_a}{\partial Q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} p_a \\ &= \frac{\partial^2 q_a}{\partial Q_i \partial Q_j} p_a - \frac{\partial^2 q_a}{\partial Q_j \partial Q_i} p_a \\ &= 0 .\end{aligned}$$

Συνεπώς οι σημειακοί μετασχηματισμοί είναι κανονικοί.

---

**Άσκηση 1.** Θεωρήστε το σημειακό μετασχηματισμό από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο

ΑΣΚΗΣΗ

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta .$$

Προσδιορίστε πως οι κανονικές ορμές  $p_x$  και  $p_y$  μετασχηματίζονται στις ορμές  $p_r$  και  $p_\theta$ , επιβεβαιώνοντας τον γενικό μετασχηματισμό των ορμών που αποδείξαμε. Προσέξτε ότι αυτός ο μετασχηματισμός δεν είναι πολικός μετασχηματισμός επί του διανύσματος της ορμής. Δείξτε με άμεσο υπολογισμό ότι οι συντεταγμένες  $(r, \theta, p_r, p_\theta)$  είναι κανονικές.

---

Θα αποδείξουμε τώρα ότι κατά τη χρονική εξέλιξη ενός χαμιλτονιανού συστήματος οι κανονικές αγκύλες δεν αλλάζουν τιμή. Κατά τη χρονική εξέλιξη οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται τη χρονική στιγμή  $t$  ως:  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ . Υπολογίζουμε την χρονική εξέλιξη της  $\{Q, P\}$  που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d\{Q, P\}}{dt} = \{\{Q, P\}, H\}$$

και την αρχική τιμή τον χρόνο  $t = 0$ :  $\{Q, P\} = 1$ . Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι:

$$\{Q, P\} = \{q, p\} + t\{\{q, p\}, H\} + \frac{t^2}{2!}\{\{\{q, p\}, H\}, H\} + \cdots = \{q, p\} = 1 .$$

Συνεπώς οι νέες συντεταγμένες που προκύπτουν από χρονική εξέλιξη κατά ένα χρονικό διάστημα μπορούν να ληφθούν ως κανονικές συντεταγμένες.

## 2 Κατασκευή κανονικών μετασχηματισμών

Κάθε μετασχηματισμός προσδιορίζεται από τους απειροστούς γεννήτορές του. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τους γεννήτορες των κανονικών μετασχηματισμών. Έστω ότι ένας συνεχής κανονικός μετασχηματισμός με παράμετρο  $\epsilon$  ορίζει τους μετασχηματισμούς

$$Q_i = q_i + \epsilon f_i(q, p) ,$$

και

$$P_i = p_i + \epsilon g_i(q, p) .$$

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός είναι κανονικός θα πρέπει οι αγκύλες των μετασχηματισμένων συντεταγμένων να είναι κανονικές. Δηλαδή θα πρέπει

$$\{Q_i, P_j\} = 1 + \epsilon (\{f_i, p_j\} + \{q_i, g_j\}) + O(\epsilon^2)$$

οπότε οι γεννήτορες πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} 0 &= \{f_i, p_j\} + \{q_i, g_j\} \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \frac{\partial g_j}{\partial p_i} \end{aligned}$$

δηλαδή:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial g_j}{\partial p_i}.$$

οπότε το ολοκλήρωμα

$$\psi - \psi_0 = \int f_i dp_i - g_j dq_j$$

είναι τέλει διαφορικό, οπότε

$$f_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, g_j = -\frac{\partial \psi}{\partial q_j}$$