Λύσεις Θεμάτων

Μηχανικής ΙΙ

Σεπτεμβρίου 2000

τμήμα: Π. Ιωάννου - Θ. Αποστολάτου

ΘΕΜΑ Ι. (α) $L = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

Αφού x, y, z κυκλικές μεταβλητές διατηρούνται οι αντίστοιχες ορμές $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Γράφοντας τη Lagrangian σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες: $L = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

Τώρα η φ ειναι κυκλική μεταβλητή, επομένως διατηρείται η z-στροφορμή $L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}$

Αλλάζοντας το ρόλο του z-άξονα, χρησιμοποιώντας αντίστοιχα τον x- ή τον y-άξονα, αποδεικνύεται ότι διατηρούνται και οι L_x, L_y αντιστώσει της στροφορμής.

β) $L = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \frac{q}{2c}(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{v}$

: Ισχύει ότι $(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{v} = (\vec{r}\times\vec{v})\cdot\vec{B}$ * (με κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων).

Επομένως

$$L = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \frac{q}{2mc}\overbrace{(m\vec{r}\times\vec{v})}^{\text{κλασική στροφορμή}}\cdot\vec{B}$$

$$= \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \vec{M}\cdot\vec{B}.$$

* Η ιδιότητα αυτή ισχύει γιατί:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \epsilon_{ijk}\, a_j b_k c_i = -\epsilon_{jik}\, a_j b_k c_i$$

$$= \epsilon_{jki}\, a_j b_k c_i = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

γ) $L = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2mc}\underbrace{m\rho^2\dot{\varphi}}_{\text{στροφορμή}}$

z, φ: κυκλικές μεταβλητές, επομένως p_z, p_φ διατηρούνται.

δ) $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ $\qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{qB}{2c}\rho^2 = m\rho^2(\dot{\varphi} + \frac{qB}{2mc}$

ΘΕΜΑ 2.

Πρόκειται για αρμονικό ταλαντωτή με μεταβλητή μάζα.

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{k^2x^2}{2}$$

$$m(0) = 4M$$
$$m(T) = M$$

όπου T χρονική διάρκεια εξάτμισης ύδατος.

Το αδιαβατικό αναλλοίωτο στην περίπτωση αυτή είναι: $\oint p\,dx$ υπολογισμένο σε μια κλειστή τροχιά.

Επειδή $m(t)$ εξελίσσεται πολύ αργά, μπορούμε να το θεωρήσουμε σταθερό σε ένα κύκλο, οπότε:

$$\left.\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -k^2 x \quad (1) \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad \ddot{x} = -\frac{k^2}{m}x \Rightarrow$$

$$x = a\cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{m}}\,t + \varphi\right)$$

επίσης $(2) \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} \Rightarrow p = ma\sin(\cdots)\sqrt{\frac{k^2}{m}}$

$$\oint p\,dx = m\frac{a^2k^2}{m}\int_0^T \sin^2(\ldots)\,dt = ma^2\sqrt{\frac{k^2}{m}}\int_0^{2\pi}\sin^2 y\,dy = \pi a^2\sqrt{k^2 m}$$

Επομένως $a^2\sqrt{m}$ παραμένει αναλλοίωτο.

$$a^2_{αρχ}\sqrt{4M} = a^2_{τελ}\sqrt{M} \Rightarrow a_{τελ} = \sqrt{2}\,a_{αρχ}.$$

(μεγαλώνει)

ΘΕΜΑ 3: (α) $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

(β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q = AX \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 2x_1 + x_2 \\ q_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \text{ ή αντίστροφα } \left\{\begin{aligned} x_2 &= q_2 \\ x_1 &= \frac{q_1 - q_2}{2} \end{aligned}\right.$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{\dot{q}_1 - \dot{q}_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}k_1\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 q_2^2$$

$$= \dot{q}_1^2\left(\frac{m_1}{8}\right) + \dot{q}_2^2\left(\frac{m_1 + 4m_2}{8}\right) - \dot{q}_1\dot{q}_2\left(\frac{m_1}{4}\right)$$

$$- q_1^2\left(\frac{k_1}{8}\right) - q_2^2\left(\frac{k_1 + 4k_2}{8}\right) + q_1q_2\left(\frac{k_1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(\dot{q}_1 \ \dot{q}_2)\overbrace{\begin{pmatrix} m_1 & -m_1 \\ -m_1 & m_1 + 4m_2 \end{pmatrix}}^{T}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{8}(q_1 \, q_2)\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + 4k_2 \end{pmatrix}}_{V}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

(γ) • Ιδιοσυχνότητες: $\det(V - T\underline{\Omega}^2) = 0$

$$\begin{Vmatrix} k_1 - m_1\underline{\Omega}^2 & -(k_1 - m_1\underline{\Omega}^2) \\ -(k_1 - m_1\underline{\Omega}^2) & (k_1 - m_1\underline{\Omega}^2) + 4(k_2 - m_2\underline{\Omega}^2) \end{Vmatrix} = 0$$

Για ευκολία ας ονομάσουμε $k_1 - m_1\Omega^2 = \lambda_1$
$k_2 - m_2\Omega^2 = \lambda_2$

$$\lambda_1(\lambda_1 + 4\lambda_2) - \lambda_1^2 = 0 \Rightarrow 4\lambda_1\lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ ή } \lambda_2 = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2$$

$$\text{ή } \Omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \omega_2^2$$

(ίδιες με τις αρχικές συχνότητες)

• Ιδιοανύσματα

→ Έστω $\Omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = k_2 - \frac{m_2}{m_1}k_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mu_1\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 4\lambda_2 q_2 = \mu_1 q_2 \Rightarrow$$

$\mu_1 = 4\lambda_2 \Rightarrow$

$q_1 = 0$ (αφού:

$0 \cdot q_1 + 0 \cdot q_2 = \lambda q_1$)

Επομένως $Q^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ επιλέχθηκε ώστε να είναι νορμαλισμένο το $Q^{(1)}$.

→ $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mu_2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1(q_1 - q_2) &= \mu_2 q_1 \\ \lambda_1(q_2 - q_1) &= \mu_2 q_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$q_1 = -q_2 \Rightarrow Q^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(δ) Η γενική κίνηση του συστήματος περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = Re\left[Q^{(1)} c_1 e^{i\omega_1 t} + Q^{(2)} c_2 e^{i\omega_2 t}\right]$$

όπου τα c_1, c_2 σχετίζονται με τις αρχικές συνθήκες.

Στο παράδειγμά μας: $q_1(t) = Re\left(\frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_2 t}\right)$

$= A\cos(\omega_1 t + \varphi)$: αρμονική ταλάντωση.

Αλλά $q_2(t) = Re\left(c_1 e^{i\omega_1 t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_2 t}\right)$

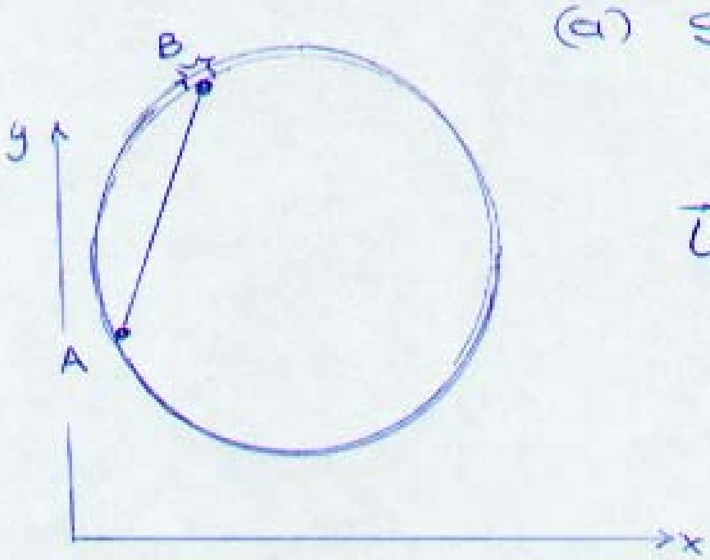
το οποίο εν γένει δεν περιγράφει αρμονική ταλάντωση αφού εμπλέκονται 2 συχνότητες.

Όπως βλέπουμε $Q^{(1)} = x_2$

$Q^{(2)} \propto x_1$

τα οποία x_1, x_2 γνωρίζουμε ότι εκτελούν αρμονική ταλάντωση. Επομένως η ανάλυση σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης αναδύει τους αρμονικούς ταλαντωτές που είναι κρυμμένοι μέσα σε ένα σύνθετο ταλαντωτικό σύστημα

ΘΕΜΑ 4:



(α) $S = \int_A^B L\,dt = \frac{1}{2} m \int_A^B \vec{v}^2\,dt$

$\vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2$

Αν θέσουμε $v_x = \bar{v}_x + \xi_x$

$v_y = \bar{v}_y + \xi_y$

όπου $\bar{v}_x = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$

και $\bar{v}_y = \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}$

$\int v_x\,dt = x_B - x_A = \int \bar{v}_x\,dt \Rightarrow \int \xi_x\,dt = 0$

όμοια $\int \xi_y\,dt = 0$.

Επομένως $S = \frac{1}{2} m \Big[\int \bar{v}_x^2\,dt + \int \bar{v}_y^2\,dt + \cancel{2\int \bar{v}_x \xi_x\,dt}^{\,0}$

$+ \cancel{2\int \bar{v}_y \xi_y\,dt}^{\,0} + \int \xi_x^2\,dt + \int \xi_y^2\,dt \Big]$

θετικές ποσότητες.

$S_{min} = \frac{1}{2} m \left[\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2\right](t_B - t_A)$ όταν $\xi_x = \xi_y = 0$

Επομένως $S = min$ όταν $v_x = σταθ = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$

$v_y = σταθ = \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}$

Δηλαδή κίνηση σε ευθεία με σταθερή ταχύτητα.

(β) $$S = \int_{A_1A_2\cdots A_NA_1} L\,dt = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \int dt \qquad (1)$$

$$\int dt = \frac{s(A_1A_2\ldots A_NA_1)}{\upsilon} = \frac{2r\sin(\pi/N)\,N}{\upsilon} \qquad (2)$$

$2r\sin(\varphi/2)$

$$(1,2) \Rightarrow S = N m \upsilon r \sin(\pi/N)$$

(γ) $$S = \frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 t_1 + \upsilon_2^2 t_2 + \ldots + \upsilon_N^2 t_N\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{s_1^2}{t_1} + \frac{s_2^2}{t_2} + \ldots + \frac{s_N^2}{t_N}\right)$$

$$= \frac{m}{2}\, 2r \left(\frac{\sin^2\varphi_1}{t_1} + \frac{\sin^2\varphi_2}{t_2} + \ldots + \frac{\sin^2\varphi_N}{t_N}\right)$$

υπό τους περιορισμούς $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N = \pi$

(μισές γωνίες των αντιστοίχων χορδών)

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_N = \frac{2Nr}{\upsilon}\sin(\pi/N) = T$$

Εύρεση ακροτάτου της S με πολ/στές Lagrange

$$\frac{d}{d\varphi_i}\,,\ \frac{d}{dt_i}\left[S - \lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N - \pi) - \mu(t_1 + t_2 + \ldots + t_N - T)\right] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\sin\phi_i \cos\phi_i}{t_i} - \lambda = 0 \\ -\frac{\sin^2\phi_i}{t_i^2} - \mu = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{\sin\phi_i}{t_i} = \sqrt{-\mu} \quad \forall i \\ \cos\phi_i = \frac{\lambda}{2\sqrt{-\mu}} \quad \forall i \end{aligned}$$

Επομένως όλα τα ϕ_i είναι ίσα με π/N
και όλα τα t_i " " " T/N

$$v_i = \frac{s_i}{t_i} = \frac{2r\sin\phi_i}{t_i} = \text{σταθερά} \ \forall i$$

$$s_i = 2r\sin\phi_i = \text{σταθερά} \ \forall i$$

(δ) Εφόσον η κίνηση που καθιστά τη δράση ακρότατη είναι η ισοταχής πολυγωνική κίνηση που διαγράφει κανονικό N-γωνο, αυτή είναι σύμφωνα με την αρχή ελάχιστης δράσης η φυσική κίνηση.

(ε) Εφόσον η φυσική τροχιά είναι αυτή που διαγράφει κανονικό N-γωνο, συμπεραίνουμε ότι κατά την ελαστική κρούση σε καμπύλη επιφάνεια, η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης, μετρούμενες και οι 2 από την κάθετη στην επιφάνεια.