

Λύσεις Μηχ. II Σεπτεμβριος 2009

Πρόβλημα 1

Η Λαγκραντζιανή είναι

$$L = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2)$$

Η δράση που αντιστοιχεί στη διαδρομή $z(t)$, $\theta(t)$ που αρχίζει στο $z(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ και καταλήγει στο $\theta(T) = 0$ $z(T) = a$ είναι:

$$S = \int_0^T \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2)dt$$

Για τις δεδομένες διαδρομές έχουμε

$$\dot{z} = a/T + \dot{\zeta}, \dot{\theta} = \dot{\eta}$$

οπότε η δράση είναι

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2} \frac{a^2}{T} + \frac{ma}{T} \int_0^T \dot{\zeta} dt + \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{\zeta}^2 + R^2\dot{\eta}^2) dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{a^2}{T} + \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{\zeta}^2 + R^2\dot{\eta}^2) dt \\ &\geq \frac{m}{2} \frac{a^2}{T} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_0^T \dot{\zeta} dt = \zeta(T) - \zeta(0) = 0$. Συνεπώς η δράση ελαχιστοποιείται για $\zeta = 0$ $\eta = 0$, και η ισοταχής κίνηση $\theta = 0$, $\zeta = at/T$ καθιστά τη δράση ελάχιστη.

Άλλες διαδρομές που οδηγούν σε τοπικά ελάχιστα της δράσης είναι: $\theta = 2\pi nt/T$ και $z = at/T$ με $n \in \mathbb{Z}$. Η δράση που αντιστοιχεί σε αυτή τη διαδρομή είναι:

$$S_0 = \frac{m}{2} \left(\frac{a^2}{T} + \frac{4\pi^2 n^2 R^2}{T} \right)$$

Η δράση ελαχιστοποιείται σε αυτή τη διαδρομή διότι αν κάνουμε μία τυχαία μεταβολή σε αυτές τις τροχιές

$$\theta = 2\pi nt/T + \eta, z = at/T + \zeta$$

που ικανοποιεί $\eta(0) = \zeta(0) = 0$ και $\eta(T) = \zeta(T) = 0$, η δράση θα αυξηθεί. Πράγματι:

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2} \left(\frac{a^2}{T} + \frac{4\pi^2 n^2 R^2}{T} \right) + \frac{ma}{T} \int_0^T \dot{\zeta} dt + \frac{2\pi mn}{T} \int_0^T \dot{\eta} dt + \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{\zeta}^2 + R^2 \dot{\eta}^2) dt \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{a^2}{T} + \frac{4\pi^2 n^2 R^2}{T} \right) + \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{\zeta}^2 + R^2 \dot{\eta}^2) dt \\ &\geq \frac{m}{2} \left(\frac{a^2}{T} + \frac{4\pi^2 n^2 R^2}{T} \right) \\ &\geq S_0 \end{aligned}$$

Η δράση που αντιστοιχεί στη κίνηση με μηδενική γωνιακή ταχύτητα είναι η ελάχιστη από όλες τις στάσιμες δράσεις.

Πρόβλημα 2

Το ένα σωματίδιο είναι στη θέση $(x, 0, 0)$, ενώ το άλλο στη θέση $(0, y, a)$, το τετράγωνο της απόστασης των: $d^2 = x^2 + y^2 + a^2$, οπότε η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + a^2)$$

Οι κινήσεις είναι ανεξάρτητες οπότε κάθε σωματίδιο κινείται ανεξάρτητα από το άλλο σαν να βρίσκεται μόνο υπό την επίδραση ελατηρίου σταθεράς k , οπότε οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι $\omega_0^2 = k/m$ και υπάρχει εκφυλισμός: κάθε τρόπος είναι κανονικός τρόπος ταλάντωσης, μπορεί να επιλεγεί ο $[1, 0]$ (το πρώτο κινείται το δεύτερο ακίνητο) και $[0, 1]$ αλλά και οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός είναι κανονικός τρόπος ταλάντωσης. Η ανεξαρτησία αυτή προκύπτει διότι η συνιστώσα της δύναμης στον άξονα x είναι $-kx$ ενώ στον άξονα y είναι $-ky$ χωρίς αναφορά στον άλλο άξονα. Ξενίζει αυτή η ανεξαρτησία διότι δεν είμαστε συνηθισμένοι να σκεπτόμαστε τρισδιάστατα. Λόγω αυτής της ανεξαρτησίας το πρώτο σωματίδιο δεν θα κινηθεί αν βρίσκεται ακίνητο στη θέση $x = 0$.

Όταν η πρώτη ευθεία κάνει κάποια κλίση τότε θα υπάρξει αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων. Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} (r^2 c^2 + (y - rs)^2 + a^2)$$

όπου σημειώσαμε τις σταθερές $c = \cos \phi$ και $s = \sin \phi$. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r - \omega_0^2 s y = 0$$

$$\ddot{y} - \omega_0^2 s r + \omega_0^2 y = 0$$

Αν θέσουμε $r = \eta e^{-i\Omega t}$ $y = \xi e^{-i\Omega t}$ για να βρούμε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης θα πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} 1 - \Omega^2/\omega_0^2 & -s \\ -s & 1 - \Omega^2/\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = 0$$

οπότε οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι:

$$\Omega^2 = (1 \pm \sin \phi) \omega_0^2$$

με τρόπο ταλάντωσης $[-1, 1]$ (στο μεγαλύτερης ενέργειας τρόπο, πιο υψίσυχνη ταλάντωση) και $[1, 1]$ ανεξάρτητο από τη γωνία !!!

Αρχικά $[0, y_0]^T = y_0/2[-1, 1]^T + y_0/2[1, 1]^T$ οπότε

$$[r(t), y(t)]^T = y_0/2[-1, 1]^T \cos(\Omega_+ t) + y_0/2[1, 1]^T \cos(\Omega_- t)$$

όπου $\Omega_{\pm} = \omega_0 \sqrt{1 \pm \sin \phi}$, συνεπώς το πρώτο σωματίδιο θα εκτελεί τη κίνηση

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{y_0}{2} (\cos(\Omega_- t) - \cos(\Omega_+ t)) \\ &= y_0 \sin((\Omega_+ + \Omega_-)t/2) \sin((\Omega_+ - \Omega_-)t/2) \end{aligned}$$

Κάναμε χρήση των ταυτοτήτων:

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\beta + \alpha}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Αν $\sin \phi \ll 1$ έχουμε σε πρώτη τάξη

$$\Omega_{\pm} = \omega_0(1 \pm \sin \phi/2)$$

οπότε σε πρώτη τάξη θα είναι:

$$\frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2} = \omega_0, \quad \frac{\Omega_+ - \Omega_-}{2} = \frac{\omega_0 \sin \phi}{2}$$

και συνεπώς:

$$r(t) = y_0 \sin \omega_0 t \sin((\omega_0 \sin \phi/2)t) .$$

Συνεπώς θα φτάσει (το διακρότημα) στο μέγιστο πλάτος σε χρόνο περίπου ίσο με

$$T \approx \frac{\pi}{\omega_0 \sin \phi}$$

Λέμε περίπου διότι στο χρόνο αυτό θα μπορούσε ο όρος $\sin(\omega_0 t)$ να μηδενίζεται. Το έτερο σωματίδιο εκτελεί τη κίνηση:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{y_0}{2} (\cos(\Omega_- t) + \cos(\Omega_+ t)) \\ &= y_0 \cos((\Omega_+ + \Omega_-)t/2) \cos((\Omega_+ - \Omega_-)t/2) \\ &= y_0 \cos(\omega_0 t) \cos((\omega_0 \sin \phi/2)t) \end{aligned}$$

οπότε στον χρόνο αυτό θα έχει μεταφέρει όλη του τη θέση στο άλλο και θα έχουν ανταλλάξει θέσεις.

Πρόβλημα 3

Το ανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A} = \frac{Br}{2} e_\theta$$

παράγει το μαγνητικό πεδίο:

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{d(rA_\theta)}{dr} = B$$

Η Λαγκραντζιανή είναι σε αυτή τη περίπτωση

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{qBR^2}{2} \dot{\theta}$$

επειδή όμως ο όρος από το μαγνητικό πεδίο είναι τέλεια χρονική παράγωγος δεν έχει δυναμική σημασία (είναι μετασχηματισμός αναβαθμονόμησης) και η Λαγκραντζιανή είναι ισοδύναμη

$$L = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2$$

που είναι η Λαγκραντζιανή ενός ελευθέρου σωματιδίου που κινείται σε κυκλική στεφάνη. Ο μετασχηματισμός στροφής $\theta \rightarrow \theta + \epsilon$ αφήνει τη Λαγκραντζιανή αναλλοίωτη, και συνεπώς διατηρείται η

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$$

δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή. Στη ίδια διατηρούμενη ποσότητα θα καταλήγαμε από την αναλλοιώτητα σε χρονικές μεταθέσεις.

Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{qBr^2}{2} \dot{\theta} + \lambda(r - R)$$

και οι τρεις εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν τις εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= \lambda + mr\dot{\theta}^2 + qBr\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(mr^2\dot{\theta} + \frac{qBr^2}{2} \right) &= 0 \\ r &= R \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας την τρίτη στη πρώτη βρίσκουμε ότι η αντίδραση είναι:

$$\lambda = -mR\dot{\theta}(\dot{\theta} + qB/m)$$

Η αντίδραση μηδενίζεται για

$$\dot{\theta} = 0$$

οπότε είναι ακίνητο το φορτίο και δεν ασκείται καμμία δύναμη, και όταν

$$\dot{\theta} = -qB/m$$

κινείται με την κυκλοτρονική γωνιακή ταχύτητα και εξισορροπείται η δύναμη η μαγνητική με την κεντροφυγο και η κυκλική κίνηση θα υπήρχε είτε υπήρχε στεφάνη είτε όχι. Ενδιάμεσα η δύναμη είναι αρνητική διότι η μαγνητική δύναμη είναι μεγαλύτερη από τον κεντρόφυγο.

Θέμα 4

Επιλέγοντας το βαρυτικό πεδίο να είναι στη τρίτη διεύθυνση έχουμε τη Χαμιλτονιανή:

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{2m} + mgx_3$$

Είναι από τον ορισμό της αγγύλης Poisson

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \{x_i, H\} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}$$

που είναι η εξίσωση του Χάμιλτον.

Έχουμε:

$$\ddot{x}_i = \{\dot{x}_i, H\} = \{\{x_i, H\}, H\}$$

και

$$\frac{d^3 x_i}{dt^3} = \{\ddot{x}_i, H\} = \{\{\{x_i, H\}, H\}, H\}$$

κ.ο.κ.

Υπολογίζουμε επειδή:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0$$

και

$$\{x_i, p_j^2\} = 2p_j \delta_{ij}$$

ότι:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = p_i/m$$

και για κάθε χρονική στιγμή

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \{\{x_1, H\}, H\} \\ &= \{p_1, H\}/m \\ &= 0\end{aligned}$$

οπότε και όλες οι ανώτερες παράγωγοι (δεύτερης τάξης και άνω) της x_1 μηδενίζονται κάθε χρονική στιγμή. Τα ίδια ισχύουν και για την x_2 , οπότε

$$x_1(t) = x_1(0) + p_1(0)t/m, \quad x_2(t) = x_2(0) + p_2(0)t/m.$$

Για την x_3 :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 &= \{\{x_3, H\}, H\} \\ &= \{p_3, H\}/m \\ &= -g\end{aligned}$$

οπότε όλες οι παράγωγοι τρίτης τάξης και άνω της x_3 μηδενίζονται. Συνεπώς:

$$x_3(t) = x_3(0) + p_3(0)t/m - gt^2/2$$