

**Λύσεις των θεμάτων του Διαγωνίσματος
Μηχανικής ΙΙ (29/8/2001)**

Θέμα 1:

$$(1) L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2, (2) H = \frac{\vec{p}^2}{2m},$$

$$(3) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, (4) H = p \dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t), \text{ όπου } p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

$$(5) \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, (6) S = \int L dt = \frac{1}{2} m u^2 T = 0.5 \text{ μονάδες δράσης },$$

$$(7) \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, (8) V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|),$$

$$(9) L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}}^2 - V(|\vec{x}|), \text{ όπου } \vec{X} \equiv \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \vec{x} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2,$$

$$(10) \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}, (11) \text{ ενέργεια } [E = \frac{1}{2} m \vec{u}^2 - \frac{GMm}{r}], \text{ όλες οι συνιστώσες της } \\ \text{στροφορμής}$$

$$[L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k],$$

$$(12) L = \frac{1}{2} m \vec{u}^2 + \vec{F}(t) \cdot \vec{x},$$

$$(13) S = \int \mathcal{L} dt dx, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_t} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_x} \right) = 0 \Rightarrow q_{tt} - q_{xx} = 0 \text{ (κυματ. εξίσωση)}.$$

(14) Το $\vec{L}$ διαγράφει έναν ορθό κώνο με άξονα το $\vec{k}$, διατηρώντας τη γωνία μεταξύ των δύο ανυσμάτων σταθερή. Η περιστροφή του $\vec{L}$ γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{k}$.

$$(15) \{G, H\} = 0$$

Θέμα 2: (α) Αν υπάρχει συνεχής μεταχηματισμός των χωρικών συντεταγμένων ενός συστήματος $q_i \rightarrow Q_i = q_i + \varepsilon K_i(q)$, που αφήνει αναλλοίωτη τη Λαγκρανζιανή του συστήματος, τότε υπάρχει μια αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα, η $K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

(β) $L' = L(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \left[K_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{K}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + O(\varepsilon^2)$. Αν η L μένει αναλλοίωτη, τότε η τετράγωνη παρένθεση πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Αν επιπλέον χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$, προκύπτει ότι

$$0 = [\dots] = \frac{d}{dt} \left(K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

Επομένως η τελευταία ποσότητα είναι διατηρούμενη.

$$(\gamma) \quad L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|). \quad \text{Σε μετασχηματισμούς της μορφής}$$

$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}_i + \varepsilon \vec{a}$ (μετάθεση), οι ταχύτητες δεν αλλάζουν $\dot{\vec{x}}_i \rightarrow \dot{\vec{x}}_i + \varepsilon \dot{\vec{a}} = \dot{\vec{x}}_i$, αλλά ούτε και οι αποστάσεις μεταξύ δύο οιασδήποτε σωματιδίων $\vec{x}_i - \vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_i + \varepsilon \vec{a} - \vec{x}_j - \varepsilon \vec{a} = \vec{x}_i - \vec{x}_j$.

Συνεπώς η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη. Το ίδιο συμβαίνει και για μετασχηματισμούς της μορφής $\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}_i + \varepsilon \vec{a} \times \vec{x}_i$ (στροφή), οι ταχύτητες δεν αλλάζουν κατά μέτρο

$\dot{\vec{x}}_i^2 \rightarrow (\dot{\vec{x}}_i + \varepsilon \vec{a} \times \dot{\vec{x}}_i)^2 = \dot{\vec{x}}_i^2 + 2\varepsilon \dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{a} \times \dot{\vec{x}}_i) + \varepsilon^2 (\vec{a} \times \dot{\vec{x}}_i)^2 = \dot{\vec{x}}_i^2 + O(\varepsilon^2)$, αλλά ούτε και το μέτρο των αποστάσεων μεταξύ δύο οιασδήποτε σωματιδίων αφού οι θέσεις αυτών γυρίζουν κατά την ίδια γωνία. Η διατηρήσιμη ποσότητα στην περίπτωση αυτή είναι η

$$K_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^N (\vec{a} \times \vec{x}_i) \cdot m_i \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i \times \vec{p}_i) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{L}_{\text{ολ}}. \text{ Από τη στιγμή που το } \vec{a} \text{ είναι}$$

τυχαίο διάνυσμα διατηρούνται όλες οι συνιστώσες της στροφορμής του συστήματος.

Θέμα 3: (α) $L = \frac{1}{2} (m(R^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m(R^2 \dot{\theta}_2^2 + \dot{z}_2^2)) - \frac{1}{2} k r^2$, όπου r η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων. Δηλαδή $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$. Αν επανέλθουμε στις κυλινδρικές συντεταγμένες ($x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$) θα έχουμε

$$r^2 = R^2 [(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2] + (z_1 - z_2)^2 =$$

$$R^2 [2 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + (z_1 - z_2)^2 = 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + (z_1 - z_2)^2$$

(β) Κατ' αρχήν είναι διαισθητικά προφανές ότι η αντιδιαμετρική θέση των σωματιδίων αποτελεί κατάσταση ισορροπίας (μπορεί εύκολα ναδειχθεί με Νευτώνειο σχεδιασμό δυνάμεων). Μπορούμε όμως να το δείξουμε πιο αυστηρά δοκιμάζοντας την $z_1 = z_2 = \text{σταθ}, \theta_2 = \theta_1 + \pi = \text{σταθ}$ στις εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange.

$$z_1 \rightarrow m\ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2) = 0$$

$$z_2 \rightarrow m\ddot{z}_2 - k(z_1 - z_2) = 0$$

$$\theta_1 \rightarrow mR^2\ddot{\theta}_1 + 2kR^2 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = 0$$

$$\theta_2 \rightarrow mR^2\ddot{\theta}_2 - 2kR^2 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = 0$$

Είναι προφανές ότι οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούνται αυτόματα από την αντιδιαμετρική λύση.

Γραμμικοποιώντας στη συνέχεια τη Λαγκρανζιανή γύρω από τη λύση ισορροπίας $z_2 = z_1 + \varepsilon_1, \theta_2 = \theta_1 + \pi + \varepsilon_2$, θα έχουμε

$$L = \frac{1}{2} m \left[R^2 (2\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_2^2) + 2\dot{z}_1^2 + 2\dot{z}_1 \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_1^2 \right] - \frac{1}{2} k \left[4R^2 (1 - \frac{\varepsilon_2^2}{8}) + \varepsilon_1^2 \right]$$

Ο σταθερός όρος της δυναμικής ενέργειας μπορεί να παραλειφθεί δίχως αλλοίωση της φυσικής σημασίας της Λαγκρανζιανής

(γ) Οι πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος είναι αντίστοιχα (με σειρά γραμμών-στηλών $z_1, \varepsilon_1, \theta_1, \varepsilon_2$)

$$M = m \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 & R^2 \\ 0 & 0 & R^2 & R^2 \end{pmatrix} \text{ και } K = k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2/2 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοσυχνότητες θα βρεθούν από την απαίτηση $\det(M\omega^2 - K) = 0$. [Το γεγονός ότι και οι δύο πίνακες είναι διαχωρισμένοι σε δύο υποπίνακες 2x2 απλοποιεί τα πράγματα. Μπορούμε να διαχωρίσουμε το πρόβλημα σε 2 προβλήματα – ένα που αφορά τις μεταβλητές z_1, ε_1 και ένα που αφορά τις θ_1, ε_2 .] Είτε ακολουθώντας την απλοποιητική διαδικασία είτε χρησιμοποιώντας ολόκληρο τον 4x4 πίνακα παίρνουμε τις ακόλουθες ιδιοσυχνότητες:

$$\omega_{1,2}^2 = 0 \text{ (διπλή ρίζα)}, \omega_3^2 = 2k/m, \omega_4^2 = -k/m.$$

Οι αντίστοιχοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (τα ιδιοανύσματα της $(M\omega_i^2 - K)X^{(i)} = 0$) είναι:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(δ) Οι δύο πρώτοι τρόποι αφορούν αδιάφορη ισορροπία (τα δύο σωματίδια μετακινούνται το ίδιο στο z-άξονα παραμένοντας αντιδιαμετρικά, ή παραμένουν στο ίδιο z-επίπεδο αλλά περιστρέφονται κατά την ίδια γωνία παραμένοντας και πάλι αντιδιαμετρικά), ο τρίτος αφορά ευσταθή ισορροπία (τα 2 σωματίδια κινούνται αντιπαράλληλα στον z-άξονα), ενώ τέλος ο τέταρτος τρόπος αντιστοιχεί σε ασταθή ισορροπία (τα 2 σωματίδια στρέφονται αντίρροπα ώστε να πλησιάσουν).

(ε) Προκειμένου να έχουμε ταλαντωτική κίνηση θα πρέπει να απουσιάζει η μοναδική ασταθής ιδιοκατάσταση. Η πιο γενική λοιπόν αρχική συνθήκη είναι $X(0) = aX^{(1)} + bX^{(2)} + cX^{(3)}$, $\dot{X}(0) = dX^{(1)} + eX^{(2)} + fX^{(3)}$. Δηλαδή οποιαδήποτε αρχική θέση και κίνηση αρκεί τα δύο σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετά γωνίας π και να περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

(στ) Διατηρούνται η ενέργεια, η ορμή κατά τον z-άξονα, και η στροφορμή γύρω από τον z-άξονα.

Θέμα 4: (α) Υπάρχουν 3 τρόποι να αποδείξουμε ότι ένα ανυσματικό δυναμικό από το οποίο μπορεί να προκύψει ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι το

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}.$$

(i)

Τανυστικά:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} B_l x_m = \frac{1}{2} \hat{e}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) B_l \delta_{jm} =$$

$$\frac{1}{2} (\hat{e}_i B_i \delta_{mm} - \hat{e}_m B_j \delta_{jm}) = \frac{1}{2} (3\vec{B} - \vec{B}) = \vec{B}$$

(ii) Με καρτεσιανές συντεταγμένες, θεωρώντας ότι ο άξονας z είναι παράλληλος με το μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & B \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (-By, Bx, 0) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -By & Bx & 0 \end{vmatrix} = B \hat{e}_z = \vec{B}.$$

(iii) Διανυσματικά (πρέπει να προσέξει κανείς να μην διαταραχτεί η θέση του διαφορικού τελεστή σε σχέση με τα υπόλοιπα μεγέθη): Εφαρμόζοντας τη διανυσματική ταυτότητα $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}] = \frac{1}{2} (3\vec{B} - B \partial_z \vec{r}) = \vec{B}.$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + q \vec{A} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + q \left(\frac{1}{2} B r \hat{e}_\theta \right) \cdot (\dot{r}, r \dot{\theta}, \dot{z}) =$$

(β)

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} q B r^2 \dot{\theta}$$

όπου η ανάλυση του ανυσματικού δυναμικού σε κυλινδρικές συντεταγμένες προκύπτει εύκολα από τον τρόπο (ii) παραπάνω.

(γ) Για τα δεδομένα της τροχιάς $r = \text{σταθ}$, $d\theta/dt = \omega = \text{σταθ}$, $z = \text{σταθ}$ προκύπτει η

$$\text{ακόλουθη δράση: } S = \int L dt = \left(\frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} q B r^2 \omega \right) T = \pi r^2 (m \omega + q B).$$

Παρατηρούμε ότι για να είναι η δράση ανεξάρτητη της ακτίνας r θα πρέπει η ποσότητα μέσα στην τελευταία παρένθεση να είναι μηδενική. Έτσι αν

$$\omega_0 = -\frac{qB}{m}, \text{ τότε } S=0.$$

$$\begin{aligned} (\delta) \left[S = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} q B r^2 \dot{\theta} \right] = \right. \\ \left. \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} m (\varepsilon^2 \dot{f}^2 + (r_0 + \varepsilon f)^2 (\omega_0 + \varepsilon \dot{g})^2 + \varepsilon^2 \dot{h}^2) + \frac{1}{2} q B (r_0 + \varepsilon f)^2 (\omega_0 + \varepsilon \dot{g}) \right] = \right. \\ \left. 0 + \varepsilon \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} m (2r_0 f \omega_0^2 + 2r_0^2 \omega_0 \dot{g}) + \frac{1}{2} q B (2r_0 f \omega_0 + r_0^2 \dot{g}) \right] + O(\varepsilon^2) \right] \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδενικός όπως δείξαμε στο ερώτημα (γ). Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τη σχέση που ικανοποιεί η ω_0 , ο όρος πρώτης τάξης ως προς ε ο οποίος πρέπει να είναι μηδενικός από την αρχή ελάχιστης δράσης, καταλήγουμε στο ότι η φυσική κίνηση πρέπει να δίνει

$$-\frac{r_0^2 q B}{2} \int_0^T dt \dot{g} = 0 \Rightarrow g(T) = g(0).$$

Η συνθήκη επαναφοράς στο ίδιο σημείο μετά από χρόνο T επιβάλλει $f(T) = f(0), h(T) = h(0) = 0, g(0) = 0, \omega_0 T + \varepsilon g(T) = 2\pi$. Έτσι μια φυσική κίνηση πρέπει να έχει σταθερή ακτίνα, σταθερή γωνιακή ταχύτητα, σταθερό z , και περίοδο ίση με $2\pi m / Bq$. (Υπάρχει και φυσική κίνηση με αλλαγή του z).

(ε) Η τιμή της ακτίνας παραμένει απροσδιόριστη. Για να υπολογιστεί θα πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα, οπότε $r_0 = \frac{u_0 T}{2\pi}$.