



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής  
Εξέταση στη Μηχανική II  
19 Μαρτίου 2013

Απαντήστε και στα 3 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαίτερος. Καλή σας επιτυχία.

## ΘΕΜΑ Α:

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματίου σε 1 διάσταση.
2. Αν πολλαπλασιάσετε την προηγούμενη Λαγκρανζιανή με τη μάζα του σωματιδίου, μπορεί η καινούργια αυτή συνάρτηση να θεωρηθεί ως ορθή Λαγκρανζιανή του σωματιδίου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
3. Αν αλλάξετε σύστημα συντεταγμένων ως ακολούθως  $x'(t) = x(t) + \int_0^t u(\tau) d\tau$  μεταβαίνοντας σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων  $x'$ , η αρχή του οποίου κινείται σε σχέση με το αρχικό  $x$  με μεταβαλλόμενη ταχύτητα  $u(t)$ , γράψτε τη Λαγκρανζιανή του ίδιου σωματιδίου στις καινούργιες συντεταγμένες και υπολογίστε τη γενικευμένη ορμή του συστήματος  $p'$ .
4. Γράψτε την εξίσωση κίνησης για το σωματίδιο αυτό στις τονούμενες συντεταγμένες και υπολογίστε την  $x'(t)$  αν  $u(t) = at$ .
5. Υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί στην κίνηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα ως συνάρτηση της αρχικής, τελικής θέσης  $x'_1, x'_2$  του σωματιδίου και της αρχικής, τελικής χρονικής στιγμής  $t_1, t_2$ .
6. Ελέγξτε αν ο μετασχηματισμός  $x' \rightarrow x' + \epsilon$  αποτελεί συμμετρία του φυσικού αυτού προβλήματος.

**ΘΕΜΑ Β:** Μια τροχαλία μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  (και ροπής αδράνειας  $I = MR^2/2$ ) κρέμεται με τη βοήθεια ενός μη εκτατού αβαρούς νήματος, τα άκρα του οποίου συνδέονται με δύο ίδια αβαρή ελατήρια σταθεράς  $k$  που είναι αναρτημένα από το ταβάνι. Το νήμα δεν γλυστρά στην τροχαλία.

1. Να κατασκευαστεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος και να βρεθεί πόσων βαθμών ελευθερίας είναι το σύστημα. Ποια η τιμή των συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσετε για την ανάλυση του προβλήματος στη θέση ισορροπίας αυτού;
2. Να γραφούν οι πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος
3. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.
4. Αν αρχικά το σύστημα βρισκόταν στη θέση που τα ελατήρια είναι στο φυσικό τους μήκος και η τροχαλία είχε γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$  (το νήμα έχει κι αυτό αντίστοιχη αρχική ταχύτητα αφού δεν γλυστρά πάνω στην τροχαλία) ποια θα ήταν η εξέλιξη της κίνησης του συστήματος.

5. Ποια θα είναι η κατώτερη θέση που θα φθάσει η τροχαλία;

**Θέμα Γ:**

1. Ξεκινώντας από τη Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου πάνω σε μια σφαίρα ακτίνας 1, κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή του συνάρτηση.
2. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και δείξτε ότι η κανονική ορμή που αντιστοιχεί στη σφαιρική γωνία  $\phi$  είναι σταθερά της κίνησης.
3. Αν αρχικά το σωματίδιο δεν βρισκόταν σε κάποιο από τους πόλους της σφαίρας  $\theta = 0$  ή  $\theta = \pi$  θα μπορούσε να περάσει αργότερα από αυτόν; Θα μπορούσε να περάσει από τον ένα αλλά όχι από τον άλλο;
4. Δείξτε ότι διατηρείται η ορμή  $p_\phi$ , ακόμη και αν το σωματίδιο που είναι αναγκασμένο να κινείται επί της σφαίρας βρίσκεται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο;
5. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ενέργειας και της  $p_\phi$  στο προηγούμενο ερώτημα (4) (εντός του βαρυτικού πεδίου) υπολογίστε την κοντινότερη απόσταση που μπορεί να φθάσει το σωματίδιο στο νότιο πόλο (αυτόν που βρίσκεται στο χαμηλότερο ύψος εντός του βαρυτικού πεδίου), αν αρχικά είναι  $\theta(0) = \pi/2, \dot{\theta}(0) = 0, \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \omega_0$ .