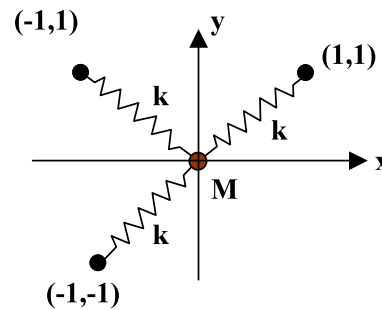


Εξετάσεις Ιουνίου 1999
στο μάθημα της Μηχανικής II
(Να απαντηθούν όλα τα θέματα)

ΘΕΜΑ 1: Ελεύθερο σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται στο χώρο. (α) Χρησιμοποιώντας την αρχή του Χάμιλτον, δείξτε ότι η φυσική διαδρομή του σωματιδίου είναι ευθύγραμμη και ομαλή. (β) Εάν το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $(0,0,0)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ και φθάνει στο σημείο $(1,0,0)$ τη χρονική στιγμή $t = 1$, ποία η δράση που αντιστοιχεί στη φυσική διαδρομή του σωματιδίου; (γ) Εάν το σωματίδιο ακολουθούσε τη διαδρομή $x(t) = t(2-t), y(t) = 0, z(t) = 0$ ποία θα ήταν τότε η αντίστοιχη δράση; Συμφωνεί το αποτέλεσμα σας με την αρχή του Χάμιλτον;

ΘΕΜΑ 2: Σωματίδιο μάζας M κινείται στο επίπεδο x - y . Το σωματίδιο είναι συνδεδεμένο στο άκρο τριών ελατηρίων, έκαστο σταθεράς k . Τα τρία ελατήρια έχουν στερεωμένα τα άλλα άκρα τους στα σημεία $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ και έχουν όλα

φυσικό μήκος $\sqrt{2}$. (α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου για μικρές κινήσεις γύρω από την αρχή των αξόνων, που είναι σημείο ισορροπίας. (β) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του σωματιδίου, τα ιδιοανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης αυτού, και το είδος ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. (γ) Πώς θα κινηθεί το σωματίδιο αν αρχικά βρισκόταν ακίνητο στη θέση $(\varepsilon, -\varepsilon)$, όπου ε πολύ μικρός θετικός αριθμός; Περιμένετε από τη γεωμετρική συμμετρία του προβλήματος την εξέλιξη αυτή;



στη θέση $(\varepsilon, -\varepsilon)$, όπου ε πολύ μικρός θετικός αριθμός; Περιμένετε από τη γεωμετρική συμμετρία του προβλήματος την εξέλιξη αυτή;

ΘΕΜΑ 3: Σωματίδιο μάζας m κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης κινούμενο στον κατακόρυφο άξονα- z . (α) Από τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου να κατασκευαστεί η Χαμιλτονιανή του. (β) Να κατασκευάσετε στο χώρο των φάσεων την καμπύλη που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου. (γ) Θεωρήστε ένα μικρό παραλληλόγραμμο στο χώρο των φάσεων του συστήματος με συντεταγμένες των κορυφών (p_0, z_0) , $(p_0 + \Delta p, z_0)$, $(p_0 + \Delta p, z_0 + \Delta z)$, $(p_0, z_0 + \Delta z)$. Το παραλληλόγραμμο αυτό μπορεί να δηλώνει μια μικρή αβεβαιότητα των αρχικών συνθηκών του συστήματος. Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου μετά από χρόνο t και επιβεβαιώστε το θεώρημα του Liouville περί διατήρησης του όγκου στον χώρο των φάσεων. (δ) Στην περίπτωση αυτού του συστήματος αλλοιώνονται με την εξέλιξη του συστήματος τα σχήματα των χωρίων του φασικού χώρου; Ισχύει αυτό γενικά σε κάθε σύστημα;

ΘΕΜΑ 4: Σωματίδιο μάζας m κινείται σε πεδίο δυνάμεων $U(r, \phi, z) = (z - k\phi)V(r)$, όπου r, ϕ, z είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες θέσης του σωματιδίου και k μια θετική σταθερά. (α) Υπάρχει κάποιος συνεχής μετασχηματισμός συντεταγμένων που να αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής του σωματιδίου; (β) Προσδιορίστε τη διατηρήσιμη ποσότητα που αντιστοιχεί σε αυτή τη συμμετρία. (γ) Το σωματίδιο κινείται αρχικά παράλληλα με τον άξονα- z με ταχύτητα u_{z0} . Ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα το σωματίδιο περνά από το σημείο $x = a, y = 0, z = b$ κινούμενο παράλληλα με τον άξονα- y . Ποια είναι η ταχύτητα κίνησής του;

Καλή επιτυχία