ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου

Σεπτέμβριος 2000

Να λυθούν και τα τέσσερα θέματα

ΘΕΜΑ 1: Σκοπός του ακόλουθου προβλήματος είναι να διερευνήσετε τις διατηρήσιμες ποσότητες που υπάρχουν όταν ένα σωματίδιο κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο.

α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου και αναφέρατε όλες τις διατηρήσιμες ποσότητες, αναφέροντας επιγραμματικά το λόγο που διατηρείται η καθεμία.

β) Σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου είναι

$$L = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v},$$

όπου $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$, και $\vec{B}$ το σταθερό μαγνητικό πεδίο. Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου μπορεί να γραφεί ως $L = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + \vec{M}\cdot\vec{B}$, όπου $\vec{M} = \frac{q\vec{J}}{2mc}$ η επονομαζόμενη μαγνητική ροπή και $\vec{J} = m\vec{r}\times\vec{v}$ η κλασική στροφορμή τού σωματιδίου.

γ) Γράψτε την Λαγκρανζιανή σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες, με τον άξονα z στη διεύθυνση του σταθερού μαγνητικού πεδίου και εντοπίστε τις συμμετρίες αυτής.

δ) Προσδιορίστε όλες τις διατηρήσιμες ποσότητες.

ΘΕΜΑ 2: Ένα βαγόνι μάζας M δύναται να κινείται επί οριζοντίου τροχιάς. Το βαγόνι είναι στερεωμένο μέσω οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k σε ακλόνητο τοίχωμα και εκτελεί ταλαντώσεις πλάτους α. Αρχικά το βαγόνι είναι γεμάτο νερό μάζας $3M$, το οποίο όμως λόγω εξάτμισης σιγά-σιγά εξαφανίζεται. Αφού γράψετε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος, υπολογίστε την τιμή του αδιαβατικού αναλλοιώτου για το παραπάνω σύστημα, υποθέτοντας ότι η εξάτμιση γίνεται πολύ αργά σε σχέση με την περίοδο της ταλάντωσης. Από το αναλλοίωτο του παραπάνω μεγέθους υπολογίστε το πλάτος της ταλάντωσης μετά την πλήρη εξάτμιση του νερού.

ΘΕΜΑ 3: (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση για ένα σύστημα δύο **ανεξάρτητων** μονοδιάστατων αρμονικών ταλαντωτών με αντίστοιχες μάζες m_1, m_2 και σταθερές σκληρότητας ελατηρίων k_1, k_2. Ποια η συχνότητα ταλάντωσης του κάθε ταλαντωτή;

(β) Κατασκευάστε έναν απλό 2x2 πίνακα **A** ο οποίος να **μην** είναι διαγώνιος και να **μην** έχει μηδενική ορίζουσα. Θεωρήστε τον σημειακό μετασχηματισμό από τις αρχικές συντεταγμένες των δύο ταλαντωτών x_1, x_2 στις νέες συντεταγμένες q_1, q_2 που υπαγορεύεται από τη σχέση $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Κατασκευάστε τη νέα Λαγκρανζιανή του συστήματος βάσει των νέων συντεταγμένων.

(γ) Υπολογίστε στη συνέχεια από τη νέα Λαγκρανζιανή τις ιδιοσυχνότητες και τα ιδιοανύσματα του συστήματος. Πώς σχετίζονται οι νέες ιδιοσυχνότητες με τις συχνότητες του ερωτήματος (α);

(δ) Αν το σύστημα είναι τέτοιο ώστε οι άμεσα παρατηρήσιμες ποσότητες είναι οι q_1, q_2, αναμένετε αυτές να εκτελούν αρμονική ταλάντωση; Στηριζόμενοι στην παραπάνω ανάλυση μπορείτε να εξηγήσετε ποιο είναι το νόημα της ανάλυσης ενός σύνθετου συστήματος που εκτελεί ταλαντώσεις σε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης;

ΘΕΜΑ 4: Ένα τραπέζι μπιλιάρδου έχει κυκλικό σχήμα. Μια μπάλα ξεκινά από την περιφέρεια του τραπεζιού με ταχύτητα μέτρου *u* και ύστερα από N ελαστικές κρούσεις στα τοιχώματα ξανακαταλήγει στο σημείο εκκίνησης.

(α) Υποθέστε ότι η μπάλα κτυπάει το τοίχωμα του μπιλιάρδου πρώτα στο σημείο A και έπειτα στο σημείο B. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη δράση για το διάστημα αυτό επιτυγχάνεται όταν η μπάλα κινείται με σταθερή ταχύτητα επί της ευθείας AB.

β) Αν η μπάλα διαγράψει ένα κανονικό N-γωνο κινούμενη με σταθερή ταχύτητα *u*, υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί στην τροχιά αυτή συναρτήσει της ακτίνας του μπιλιάρδου r, της ταχύτητας u, και της γωνίας του N-γωνου $\phi = \dfrac{2\pi}{N}$.

γ) Έστω τώρα η μη φυσική κίνηση, $A_1 A_2 \cdots A_N A_1$ (όπου $A_1 A_2 \cdots A_N A_1$ μη κανονικό N-γωνο), κατά την οποία στον ίδιο χρόνο με την τροχιά (β), το σωματίδιο εκτελεί τη διαδρομή $A_1 A_2 \cdots A_N A_1$, με διαφορετικές ταχύτητες στο κάθε τμήμα αλλά επιστρέφει στο ίδιο σημείο. Αποδείξτε, κάνοντας χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange ή αλλιώς ότι η δράση καθίσταται ακρότατη στην περίπτωση (β) δηλαδή, όταν το $A_1 A_2 \cdots A_N A_1$ είναι κανονικό πολύγωνο και όταν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό.

δ) Συγκρίνοντας όλες τις παραπάνω περιπτώσεις κινήσεων ποιο το συμπέρασμα σας σχετικά με τη φυσική κίνηση, βασιζόμενοι στην «αρχή ελαχίστης δράσεως»;

ε) Θα μπορούσατε να καταλήξετε σε κάποιο συμπέρασμα όσον αφορά στην ελαστική κρούση σωματιδίου (υποθέστε ότι τέτοιο είναι η μπάλα) πάνω σε καμπύλη επιφάνεια κατ' αντιστοιχία του τι συμβαίνει κατά την ελαστική κρούση σε επίπεδη επιφάνεια;

Καλή επιτυχία