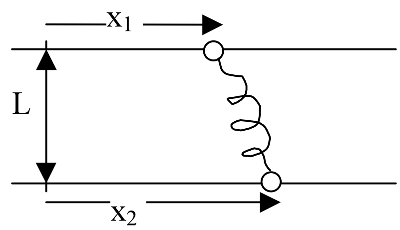
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2001

ΘΕΜΑ 1

Ένα φυσικό σύστημα, ενός βαθμού ελευθερίας, περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση Hamilton: $H = \frac{(p-2ax)^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$, όπου a κάποια σταθερά και x, p η κανονική θέση και ορμή του συστήματος. (α) Κατασκευάστε την συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί στο σύστημα αυτό. (β) Δείξτε ότι ένα μέρος της συνάρτησης αυτής αποτελεί μετασχηματισμό βαθμονόμησης (βαθμίδας). (γ) Λαμβάνοντας υπόψη το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) μπορείτε να βρείτε μια συνάρτηση Lagrange που περιγράφει το ίδιο φυσικό σύστημα με το αρχικό; (δ) Τελικά ποιό φυσικό σύστημα περιγράφει η αρχική συνάρτηση Hamilton; (ε) Ορίζουμε τον μετασχηματισμό, από τις αρχικές κανονικές συντεταγμένες σε καινούριες συντεταγμένες $x \to X = x$ και $p \to P = p - 2ax$. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{X, P\}_{x,p}$. Είναι οι καινούριες συντεταγμένες κανονικές;

ΘΕΜΑ 2

Δύο σωματίδια μάζας m (το κάθε ένα) μπορούν να κινούνται ελεύθερα πάνω σε δύο παράλληλες γραμμές απόστασης L. Τα σωματίδια συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k το οποίο έχει φυσικό μήκος $l < L$. Το όλο σύστημα βρίσκεται εκτός οποιουδήποτε πεδίου δυνάμεων. (α) Γράψτε την συνάρτηση Lagrange του συστήματος. (β) Πότε το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας; (γ) Θεωρώντας μικρές εκτροπές ε_1 και ε_2, αντίστοιχα, από την θέση ισορροπίας, υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες και τους κανονικούς (φυσικούς) τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. (δ) Τι κινήσεις περιγράφουν αυτοί οι τρόποι ταλάντωσης; [Δίδεται ότι $(1+y)^m \cong 1 + my$, για $y << 1$.]



ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε ένα σωμάτιο μάζας m, που περιορίζεται να κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R, στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις οποιουδήποτε είδους. (α) Ποιός είναι ο αριθμός των γενικευμένων συντεταγμένων που απαιτούνται για την περιγραφή του συστήματος; (β) Να βρεθεί η συνάρτηση Lagrange του συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ). (γ) Να βρεθεί η συνάρτηση Hamilton του συστήματος. Διατηρείται σταθερή; (δ) Αν για t = 0, $\dot{\phi}(0) = 0$, δείξτε ότι η κίνηση του σωματίου θα γίνεται κατά μήκος ενός μεγίστου κύκλου της σφαίρας.

ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες x,y,z, περιστρέφεται, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα z. Ένα σωμάτιο μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης που απορρέει από ένα δυναμικό V(x,y,z). (α) Να βρεθούν οι εξισώσεις Lagrange που περιγράφουν την κίνηση του σωματίου στο σύστημα συτεταγμένων (x,y,z). (β) Δείξτε ότι η συνάρτηση Lagrange που βρήκατε, έχει την ίδια μορφή με την συνάρτηση Lagrange για το αδρανειακό σύστημα, με την προσθήκη ενός γενικευμένου δυναμικού (δηλαδή δυναμικού που εξαρτάται από ταχύτητα).

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1: (α) Η κατασκευή της συνάρτησης του Lagrange γίνεται μέσω του μετασχηματισμού Legendre: $L = p\dot{x} - H$, αφού πρώτα γράψουμε την ορμή ώς συνάρτηση της θέσης και της ταχύτητας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της εξίσωσης Hamilton: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p - 2ax}{m}$. Έτσι $p = m\dot{x} + 2ax$. Με την αντικατάσταση αυτή η συνάρτηση του Lagrange καταλήγει στην ακόλουθη μορφή:

$$L = (m\dot{x} + 2ax)\dot{x} - \left[\frac{(m\dot{x} + 2ax - 2ax)^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right] = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + 2ax\dot{x}$$

(β) Ο τελευταίος όρος στην παραπάνω συνάρτηση Lagrange αποτελεί μετασχηματισμό βαθμονόμησης, αφού αποτεί τέλεια χρονική παράγωγο της ποσότητας ax^2.

(γ) Προφανώς το υπόλοιπο κομμάτι της συνάρτησης Lagrange, εκτός του μετασχηματισμού βαθμονόμησης, περιγράφει ακριβώς το ίδιο φυσικό πρόβλημα όπως και η παραπάνω συνάρτηση Lagrange. Το υπόλοιπο αυτό κομμάτι είναι εμφανώς η συνάρτηση Lagrange ενός αρμονικού ταλαντωτή.

(δ) Συνεπώς και η αρχική συνάρτηση του Hamilton περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και ελαστικότητας k.

(ε) Η αγκύλη Poisson είναι $\{X, P\}_{x,p} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2a) = 1$. Συνεπώς ο μετασχηματισμός αυτός είναι κανονικός. Αυτός είναι εξ΄άλλου ο λόγος που η περίεργη Hamiltonian περιγράφει απλώς έναν αρμονικό ταλαντωτή. Το ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι κανονικός σημαίνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη θέση και ορμή με τα αντίστοιχα κεφαλαία και έτσι $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2$.

ΘΕΜΑ 2: (α) Η μεν κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2}\frac{1}{2}m\dot{x}_2^{\,2}$ ενώ η δυναμική ενέργεια του συστήματος έχει να κάνει με την επιμήκυνση του ελατηρίου. Στην τυχαία θέση των σωμάτων το μήκος του ελατηρίου είναι $l' = \sqrt{L^2 + (x_1 - x_2)^2}$, επομένως το ελατήριο είναι επιμηκυσμένο κατά $l' - l$. Έτσι η δυναμική ενέργεια είναι $V = \frac{1}{2}k(l' - l)^2$. Συνολικά η Lagrangian είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2}\frac{1}{2}m\dot{x}_2^{\,2} - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2 + (x_1 - x_2)^2} - l\right).$$

(β) Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να υπολογίσει κανείς τη θέση ισορροπίας του συστήματος, δηλαδή λύσεις των εξισώσεων κίνησης της μορφής $x_1 = \sigma\tau\alpha\theta_1, x_2 = \sigma\tau\alpha\theta_2$. Κατ΄ αρχήν είναι προφανές ότι μόνο όταν τα σωματίδια βρίσκονται στην κοντινότερη απόσταση το ένα από το άλλο και το ελατήριο είναι κάθετο στις παράλληλες γραμμές δεν υπάρχουν δυνάμεις κατά μήκος των τροχιών κίνησης των 2 σωματιδίων. Ταυτόχρονα φαίνεται ότι το δυναμικό παίρνει την ελάχιστη τιμή του όταν $x_1 = x_2$, αφού $L > l$. Τέλος γράφοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange γίνεται έκδηλο ότι όταν $x_1 = x_2$ έχουμε λύση ισορροπίας $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$.

(γ) Εκτρέποντας το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του $x_1 = x_2 = a = \sigma\tau\alpha\theta$, κατά $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα, η Lagrangian παίρνει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_1^{\,2}\frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_2^{\,2} - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} - l\right).$$

Για μικρές μάλιστα εκτροπές (προφανώς σε σχέση με το L) η ρίζα απλοποιείται ως ακολούθως

$$\sqrt{L^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} = L\sqrt{1 + (\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{L})^2} \cong L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{L}\right)^2\right) = L + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{2L}.$$

Έτσι η Lagrangian κρατώντας μέχρι τετραγωνικούς όρους ως προς τις μικρές ποσότητες γίνεται

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_1^{\,2}\frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_2^{\,2} - \frac{1}{2}k\left(L - l + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{2L}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_1^{\,2}\frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_2^{\,2} - \frac{1}{2}k\left[(L-l)^2 + \frac{L-l}{L}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\right] + O\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^4\right]$$

Αγνοώντας τους σταθερούς όρους (μετασχηματισμός βαθμονόμησης) και τους όρους ανώτερης τάξης (μικρές εκτροπές) οι πίνακες της κινητικής και δυναμικής ενέργειας παίρνουν τη μορφή

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, U = k\frac{L-l}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές των κανονικών τρόπων ταλάντωσης θα βρεθούν από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(U - \mathrm{T}\omega^2) = 0 \Rightarrow \left[k\frac{L-l}{L} - m\omega^2\right]^2 - \left[-k\frac{L-l}{L}\right]^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \begin{cases} 0, & \acute{\eta} \\ \frac{2k}{m}\frac{L-l}{L} \end{cases}.$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις (κανονικοί τρόποι ταλάντωσης) θα βρεθούν από

$$\left(U - \mathrm{T}\omega_i^{\,2}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Για την $\omega^2 = 0, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ενώ για την $\omega^2 = \frac{2k}{m}\frac{L-l}{L}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(δ) Οι δύο αυτοί τρόποι ταλάντωσεις έχουν το εξής φυσικό νόημα. Ο πρώτος, όπου τα δύο σωματίδια κινούνται το ίδιο οδηγεί σε ομαλή κίνηση (όχι ταλάντωση), ενώ ο δεύτερος τρόπος όπου τα σωματίδια κινούνται το ίδιο αλλά αντίρροπα οδηγεί σε ταλάντωση, μια το ένα δεξιά το άλλο αριστερά, μια το αντίθετο.

ΘΕΜΑ 3: (α) Γενικά για τον καθορισμό της θέσης ενός σωματιδίου στο χώρο απαιτούνται τρεις συντεταγμένες (σε οποιοδήποτε σύστημα, καρτεσιανό, κυλινδρικό, σφαιρικό κλπ). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο περιορισμός της κίνησης σε μια σφαιρική επιφάνεια είναι ένας δεσμός που περιορίζει τον αριθμό των απαιτούμενων συντεταγμένων στις δύο. Η συμμετρία του προβλήματος καθιστά τις 2 κλασικές σφαιρικές γωνίες θ,φ άκρως κατάλληλες για γενικευμένες συντεταγμένες.

(β) Η κινητική ενέργεια σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2).$$

Στην περίπτωσή μας όπου η ακτίνα της σφαίρας είναι σταθερή, έστω R, και δεν υπάρχει δυναμική ενέργεια (απουσία δυνάμεων), η συνάρτηση Lagrange παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2).$$

(γ) Η συνάρτηση Hamilton μπορεί να κατασκευαστεί μέσω ενός μετασχηματισμού Legendre: $H = p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L$, αφού πρώτα αντικαταστήσουμε τις ταχύτητες μέσω του ορισμού των ορμών:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}, p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \dot{\phi} = \frac{p_\theta}{mR^2\sin^2\theta}.$$

Έτσι με απλές πράξεις καταλήγουμε ότι

$$H = \frac{p_\theta{}^2}{2mR^2} + \frac{p_\phi{}^2}{2mR^2\sin^2\theta}.$$

Αφού αυτή δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το χρόνο, διατηρείται. Εκφράζει μάλιστα την ενέργεια του σωματιδίου.

(δ) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Hamilton:

$\dot{p}_\phi = \frac{\partial H}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = \sigma\tau\alpha\theta$. (κάτι το οποίο διαπιστώνουμε και από τη Lagrangian εφόσον η φ είναι κυκλική μεταβλητή). Έτσι έχουμε ότι

$$\sin^2\theta\,\dot{\phi} = \text{σταθ}$$

Βάσει των δοσμένων αρχικών συνθηκών η σταθερά αυτή είναι ίση με μηδέν. Οι δυνατές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι οι $\theta = 0, \dot{\phi} = 0$. Η πρώτη συνεπάγεται την παραμονή του σωματιδίου στον πόλο της σφαίρας, ενώ η δεύτερη την κίνηση του σωματιδίου σε σταθερό φ, δηλαδή επί ενός μεσημβρινού. Και οι δύο λύσεις αναφέρονται σε κινήσεις επί ενός μεγίστου κύκλου (η ακινησία αποτελεί εκφυλισμένη περίπτωση κίνησης).

ΘΕΜΑ 4: (α) Η συνάρτηση Lagrange στο αδρανειακό σύστημα (έστω x'y'z') έχει τη μορφή $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - \widetilde{V}(x', y', z')$, όπου $\widetilde{V}$ είναι μια συνάρετηση δυναμικού που στα ίδια σημεία για το αδρανειακό και το περιστρεφόμενο σύστημα έχει την ίδια τιμή. Ταυτόχρονα, η ταχύτητα στο περιστρεφόμενο σύστημα ικανοποιεί τη σχέση $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}$. Έτσι $\vec{v}'^2 = \vec{v}^2 + 2\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\vec{r})^2$ ή σε καρτεσιανές συντεταγμένες, με τη δεδομένη γωνιακή ταχύτητα

$$\vec{v}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\omega(-\dot{x}y + x\dot{y}) + \omega^2(x^2 + y^2).$$

Έτσι η Lagrangian, στο περιστρεφόμενο σύστημα αξόνων παίρνει τη μορφή (αντικαθιστώντας τις τονούμενες ποσότητες στην προηγούμενη Lagrangian με τις άτονες):

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\omega(-\dot{x}y + x\dot{y}) + \omega^2(x^2 + y^2)\right] - V(x,y,z).$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange ($\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$) είναι λοιπόν:

$$\boxed{\begin{aligned}&m\left(\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2 x\right)+\frac{\partial V}{\partial x}=0\\&m\left(\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2 y\right)+\frac{\partial V}{\partial y}=0\\&m\ddot{z}+\frac{\partial V}{\partial z}=0\end{aligned}}$$

(β) Όπως φαίνεται από τη μορφή της παραπάνω Lagrangian είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που θα γράφαμε για ένα αδρανειακό σύστημα με την προσθήκη του γενικευμένου (εξαρτώμενου από την ταχύτητα) δυναμικού:

$$U=-\frac{1}{2}m\left[2\omega(-\dot{x}y+x\dot{y})+\omega^2(x^2+y^2)\right],$$

$$L_{\pi\varepsilon\rho}=L_{\alpha\delta\rho}-U\,.$$

(24/9/2001)

AM	Βαθμός
9380	5
10040	6
10059	7
10502	5
10809	5
10822	5
10869	5
10928	6
10948	7
10975	5
11057	6
11070	6
11172	5
11183	6
11251	5
11289	5
11533	7
11538	5
11565	5
11568	5
11602	5
11663	5
98003	6
98009	5
98014	9
98020	5
98071	5
98111	5
98120	5
98150	5
98163	5
98182	5
98198	5
98208	6
98322	6
98328	5
99003	5
99007	5
99010	5
99042	7
99052	6
99064	8
99065	8
99080	5
99081	6
99099	5
99115	5
99168	5
99197	6
99214	5
99221	5
99247	9
99254	5
99317	6