



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ II
Σεπτέμβριος 2004

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 θέματα με σαφήνεια και συντομία. Η πλήρης απάντηση θέματος εκτιμάται ιδιαίτερα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

α) Δείξτε ότι η περίπτωση ενός Λαγκρανζιανού συστήματος με μία κυκλική μεταβλητή (μεταβλητή η οποία δεν εμφανίζεται στη Λαγκρανζιανή) αποτελεί ένα παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος της Noether. Συγκεκριμένα βρείτε το μετασχηματισμό που αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής και την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.

β) Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q βρίσκεται μέσα σε σταθερό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου. [Υπ. $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.]

γ) Βρείτε δύο διαφορετικούς μετασχηματισμούς που αποτελούν συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Ποιες είναι οι διατηρούμενες ποσότητες;

δ) Τι περιμένετε φυσικά να διατηρείται στο συγκεκριμένο σύστημα και πώς σχετίζονται οι ποσότητες που βρήκατε με αυτές που θα περιμένετε;

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Ένα σωματίδιο μάζας m πέφτει κατακόρυφα μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης πάνω σε σκληρό ελαστικό δάπεδο και αναπηδά. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του σωματιδίου όταν ξεκινά από ύψος H και επανέρχεται στο ίδιο ύψος μετά από χρόνο T . (Δεν ξεκινά κατ' ανάγκη χωρίς αρχική ταχύτητα.)

α) Δείξτε με εφαρμογή της αρχής ελάχιστης δράσης ότι τη στιγμή που το σωματίδιο συγκρούεται με σκληρό αδιαπέραστο τοίχωμα η ταχύτητα αλλάζει φορά αλλά όχι μέτρο. Τι δυναμικό πρέπει να χρησιμοποιήσετε για να περιγράψετε το αδιαπέραστο τοίχωμα; [Υπ. Θεωρήστε μια πολύ κοντινή περιοχή στο σημείο ανάκλασης έτσι ώστε το δυναμικό να θεωρείται περίπου σταθερό.]

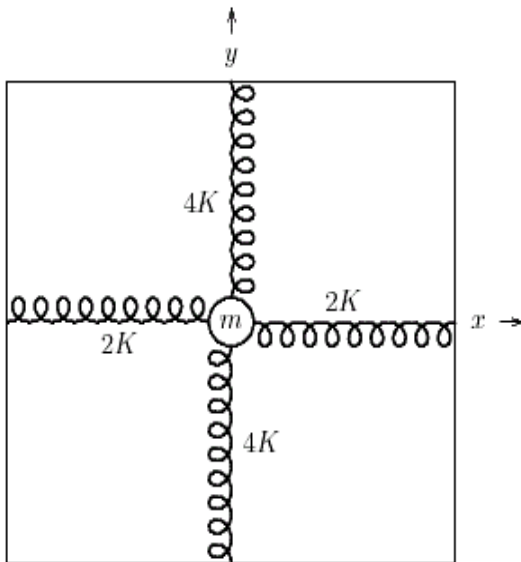
β) Θεωρήστε δύο τμήματα της τροχιάς ένα κατά την κατάβαση $|\delta \mathbf{z}_1|$ και ένα κατά την ανάβαση $|\delta \mathbf{z}_2|$, γύρω από το ίδιο ύψος $\mathbf{z}$. Δείξτε ότι για δεδομένη απειροστή διάρκεια δt για καθένα από τα δύο αυτά τμήματα και για δεδομένο συνολικό μήκος $\delta \mathbf{z} = |\delta \mathbf{z}_1| + |\delta \mathbf{z}_2|$ η αντίστοιχη απειροστή δράση καθίσταται ελάχιστη όταν οι δύο απειροστές διαδρομές έχουν το ίδιο μήκος. Τι συμπέρασμα βγάξετε για την ταχύτητα του σωματιδίου όταν περνά από το ίδιο ύψος είτε κατεβαίνοντας είτε

ανεβαίνοντας; Τι συμπέρασμα βγάζεται για τους συνολικούς χρόνους πτώσης και ανύψωσης;

γ) Γνωρίζετε από τη θεωρία ότι η τροχιά που ελαχιστοποιεί τη δράση ενός σωματιδίου ενόσω αυτό κινείται ελεύθερα μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο είναι της μορφής

$$z(t) = A + Bt - \frac{1}{2}gt^2.$$

Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων ερωτημάτων, θέτοντας ως χρονική στιγμή 0 τη στιγμή της ανάκλασης που το σωματίδιο βρίσκεται στο ύψος 0 για να υπολογίσετε την αρχική (όταν ξεκινά από ύψος H) ταχύτητα κίνησης του σωματιδίου.



Θέμα 3 (25 μονάδες) Μάζα m κινείται με αμελητέα τριβή στο οριζόντιο ακίνητο τετράγωνο τραπέζι του σχήματος και είναι συνδεδεμένη με τα ελατήρια του σχήματος. Η μάζα ισορροπεί στο κέντρο του τραπεζιού. Στην κατάσταση ισορροπίας όλα τα ελατήρια έχουν μήκος l ενώ το φυσικό μήκος των ελατηρίων είναι 0. Θεωρήστε ότι η μάζα εκτελεί μικρές κινήσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας.

α) Γράψτε τη γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή που διέπει τη δυναμική περί το σημείο

ισορροπίας. Γράψτε την ενέργεια του συστήματος.

β) Εκτός από τη συνολική ενέργεια του συστήματος υπάρχει άλλη μία διατηρούμενη ποσότητα. Προσδιορίστε την.

γ) Θεωρήστε τώρα ότι στη μάζα ασκείται η δύναμη $\vec{F} = (F_0 \cos \omega t, F_0 \cos \omega t)$ που έχει ίσες συνιστώσες στους άξονες x και y . Προσδιορίστε την εξαναγκασμένη κίνηση που ταλαντώνεται με συχνότητα ω .

Θέμα 4 (25 μονάδες)

Το διδιάστατο πλέγμα του Toda περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \ln(t_{12}),$$

$$\text{όπου } t_{12}^2 = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2.$$

α) Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον.

β) Δείξτε από τις εξισώσεις αυτές ότι οι εξής 4 ποσότητες διατηρούνται κατά την κίνηση:

$$\sum_{i=1}^2 p_i, \quad \sum_{i=1}^2 q_i, \quad \sum_{i=1}^2 (q_i^2 + p_i^2), \quad \sum_{i=1}^2 (p_i \dot{q}_i - q_i \dot{p}_i).$$

γ) Αν θεωρήσουμε ότι η «θέση» του i -οστού σωματιδίου είναι (q_i, p_i) στο δισδιάστατο καρτεσιανό χώρο (q, p) , τότε η σχετική θέση των σωματιδίων δίδεται από το διάνυσμα με συντεταγμένες $\vec{x} = (q_2 - q_1, p_2 - p_1)$ και η «απόσταση» μεταξύ των σωματιδίων δίδεται από το $|\vec{x}| = r_{12}$. Δείξτε ότι η «απόσταση» μεταξύ των σωματιδίων σε αυτό το χώρο είναι σταθερή κατά την κίνηση. Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί το διάνυσμα της σχετικής θέσης των σωματιδίων αν περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Δείξτε ότι πράγματι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή και υπολογίστε την αν η «απόσταση» μεταξύ των σωματιδίων είναι $2a$.

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1: (α) Αν η $L(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{k-1}, \dot{x}_k, \dot{x}_{k+1}, \dots, \dot{x}_n, t)$ δεν εξαρτάται από τη θέση x_k , αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε αλλαγή και αν κάνουμε στη θέση αυτή, η Λαγκρανζιανή δεν θα αλλάξει. Έτσι ένας μετασχηματισμός της μορφής $x_k \rightarrow x_k + a\varepsilon$ αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα της Noether διατηρείται η ποσότητα $a p_k = a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}$ δηλαδή η k συνιστώσα της ορμής.

(β) $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(E_1 x + E_2 y + E_3 z)$, αφού $\boxed{\phi = -\vec{E} \cdot \vec{x}}$.

(γ) Οι μετασχηματισμοί $x \rightarrow x + \varepsilon E_2, y \rightarrow y - \varepsilon E_1$, και χωριστά οι $z \rightarrow z + \varepsilon E_2, y \rightarrow y - \varepsilon E_3$, αποτελούν δύο διαφορετικές συμμετρίες της Λαγκρανζιανής. Εξαιτίας της πρώτης συμμετρίας διατηρείται η ποσότητα $E_2 p_x - E_1 p_y$, ενώ εξαιτίας της δεύτερης διατηρείται η $E_2 p_z - E_3 p_y$.

(δ) Οι δύο αυτές ποσότητες δεν είναι τίποτε άλλο από τις $(\vec{p} \times \vec{E})_z, -(\vec{p} \times \vec{E})_x$. Γνωρίζουμε ότι η ορμή κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο διατηρείται και οι ποσότητες που βρήκαμε δεν είναι τίποτε άλλο από τις δύο συνιστώσες αυτής της κάθετης ορμής. Η τρίτη συνιστώσα είναι απλώς γραμμικός συνδυασμός των δύο παραπάνω.

ΘΕΜΑ 2: (α) Για να αναπαραστήσουμε το αδιαπέραστο τοίχωμα πρέπει να τοποθετήσουμε ένα άπειρο δυναμικό για $z \leq 0$. Έτσι το δυναμικό είναι της μορφής

$$V(z) = \begin{cases} mgz, & z > 0 \\ +\infty, & z \leq 0 \end{cases}.$$

Πολύ κοντά στο σημείο $z = 0$ η μεταβολή του δυναμικού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Έτσι η δράση για την μικρή αυτή περιοχή (κατεβαίνοντας και ανεβαίνοντας κοντά στο ύψος του δαπέδου) είναι το χρονικό ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας, σαν να ήταν ελεύθερο το σωματίδιο. Έτσι το μέτρο της

ταχύτητας διατηρείται σταθερό, αν και η φορά αυτής αλλάζει ώστε το σωματίδιο να μην περάσει στην απαγορευμένη περιοχή.

(β) Η συνολική δράση που αντιστοιχεί στις δύο αυτές περιοχές είναι

$$\delta S = \frac{1}{2} m \left(\frac{\delta z_1^2}{\delta t} + \frac{\delta z_2^2}{\delta t} \right) - 2\delta t m g z$$

Για να είναι ελάχιστη η δράση αυτή για δεδομένο $\delta z = |\delta z_1| + |\delta z_2|$ θα πρέπει $|\delta z_1| = |\delta z_2| = \delta z/2$, αφού $x^2 + (a-x)^2$ είναι ελάχιστο για $x = a/2$. Αν προσθέσουμε τις δράσεις από όλες αυτές τις περιοχές και θέλουμε η συνολική δράση να είναι ελάχιστη θα πρέπει για κάθε τέτοιο ζεύγος περιοχών να ισχύουν τα παραπάνω, δηλαδή η ταχύτητα καθόδου να ισούται με την ταχύτητα ανόδου σε ένα δεδομένο ύψος. Συνεπώς και οι χρόνοι καθόδου και ανόδου θα ισούνται.

(γ) Θέτοντας $t = 0$ όταν $z = 0$, θα έχουμε

$$z(t) = \begin{cases} Bt - \frac{1}{2} g t^2, 0 > t \geq -T/2 \\ -Bt - \frac{1}{2} g t^2, 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

Αυτή είναι η τροχιά που ελαχιστοποιεί τη δράση. Θα πρέπει επίσης $z(T/2) = H$, οπότε

$$B = -\frac{2H}{T} - \frac{gT}{4}.$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου όταν αρχίζει η πτώση είναι λοιπόν

$$u_0 = \dot{z}(-T/2) = B - g(-T/2) = \frac{gT}{4} - \frac{2H}{T}.$$

ΘΕΜΑ 3: (α) Αν το σωματίδιο βρεθεί στη θέση (x, y) , τα μήκη των ελατηρίων θα είναι

$$\Delta l^2_{\text{αριστ}} = (l+x)^2 + y^2, \Delta l^2_{\text{δεξ}} = (l-x)^2 + y^2, \Delta l^2_{\text{πανω}} = (l-y)^2 + x^2, \Delta l^2_{\text{κατω}} = (l+y)^2 + x^2$$

Συνεπώς η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου είναι

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} 2k(2x^2 + 2y^2) - \frac{1}{2} 4k(2x^2 + 2y^2) =$$

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} 12k(x^2 + y^2)$$

Η ενέργεια είναι απλώς το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας.

(β) Η Λαγκρανζιανή αυτή περιγράφει δύο ανεξάρτητους αρμονικούς ταλαντωτές στον x-και στον y-άξονα αντίστοιχα, επομένως διατηρούνται οι ενέργειες των δύο ταλαντωτών χωριστά.

(γ) Η ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης για την εξαναγκασμένη κίνηση του σωματιδίου σε καθένα από τους 2 άξονες είναι

$$x = y = \frac{F_0}{12k - m\omega^2} \cos \omega t, \text{ επομένως το σωματίδιο κινείται επί της ευθείας } x=y.$$

ΘΕΜΑ 4:

(α)

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1 - p_2}{t_{12}^2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = -\frac{p_1 - p_2}{t_{12}^2}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{q_1 - q_2}{t_{12}^2}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{q_1 - q_2}{t_{12}^2}$$

(β) Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται αμέσως ότι $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2, \dot{p}_1 = -\dot{p}_2$. Έτσι οι δύο πρώτες ποσότητες διατηρούνται αυτόματα. Παραγωγίζοντας την τρίτη ποσότητα παίρνουμε

$$2(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + \dot{p}_1 p_1 + \dot{p}_2 p_2) = 2(q_1 - q_2)(p_1 - p_2)/t_{12}^2 - 2(q_1 - q_2)(p_1 - p_2)/t_{12}^2 = 0$$

Η δε τέταρτη ποσότητα αν αντικαταστήσουμε τις χρονικές παραγώγους των ποσοτήτων δίνει

$$(p_1 - p_2)^2/t_{12}^2 + (q_1 - q_2)^2/t_{12}^2 = 1 \text{ δηλαδή είναι σταθερή και έχει τιμή } 1.$$

(γ) Η Χαμιλτονιανή και άρα η ποσότητα t_{12} διατηρούνται αφού η Χαμιλτονιανή δεν έχει εκπεφρασμένη εξάρτηση από το χρόνο. Αν το $\vec{x}$ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα τότε ικανοποιεί την εξίσωση $\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \times \vec{x}$. Από τις εκφράσεις για τις χρονικές παραγώγους των διαφορών ποσοτήτων είναι εύκολο να δει κανείς ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι κάθετη στο επίπεδο των $(q_1 - q_2, p_1 - p_2)$ και μάλιστα με φορά τέτοια ώστε το διάνυσμα να περιστρέφεται αριστερόστροφα (σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού). Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ισούται με το μέτρο του $\dot{\vec{x}}$ προς το μέτρο του $\vec{x}$. Το μέτρο του $\vec{x}$ είναι t_{12} ενώ το μέτρο του $\dot{\vec{x}}$ είναι $1/t_{12}$. Έτσι η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο $t_{12}^2 = 4a^2$.