



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II 14 Σεπτεμβρίου 2009

Απαντήστε και στα 4 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαίτερος. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου ακτίνας R και απεριορίστου μήκους. Το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο με κυλινδροπολικές συντεταγμένες $\theta = 0, z = 0$ τη χρονική στιγμή 0 και καταλήγει στο σημείο $\theta = 0, z = a$ τη χρονική στιγμή T .

1. Γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει τη δράση του σωματιδίου (όχι την ελαχιστοποιημένη) ως συνάρτηση της τυχαίας διαδρομής που ακολουθεί αυτό.
2. Θεωρώντας ότι η διαδρομή που ακολουθεί το σωματίδιο είναι η

$$\theta(t) = \eta(t), \quad z(t) = a t/T + \zeta(t)$$

όπου $\eta(0) = \eta(T) = \zeta(0) = \zeta(T) = 0$, ξαναυπολογίστε τη δράση και βρείτε την ακριβή μορφή των συναρτήσεων $\eta(t), \zeta(t)$ που ελαχιστοποιεί τη δράση.

3. Ποια η ελάχιστη αυτή τιμή της δράσης;
4. Σκεφτείτε μια άλλη διαδρομή που επίσης καθιστά τη δράση ελάχιστη ως προς μικρές παρεκτροπές από αυτήν, επιλέγοντας διαφορετικά τη συνάρτηση $\theta(t)$. [Υπ: Εκμεταλλευτείτε το γεγονός ότι το σημείο με συντεταγμένη $\theta = 2\nu\pi$ (όπου ν ακέραιος) είναι ακριδώς το ίδιο με το $\theta = 0$.]
5. Συγκρίνατε τη νέα αυτή ελαχιστοποιημένη τιμή της δράσης με εκείνη του ερωτήματος (3).

ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες) Δύο σωματίδια με ίδιες μάζες m ολισθαίνουν χωρίς τριβή πάνω στις ευθείες $y = z = 0$ (τον άξονα x) και $x = 0, z = a$ (παράλληλη στον άξονα y). Οι δύο μάζες συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k και μηδενικού φυσικού μήκους. [Για να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των δύο μαζών γράψτε απλώς τις καρτεσιανές συντεταγμένες τους.]

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος αυτού.
2. Βρείτε τις ιδοσυχνότητες και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος.
3. Εξηγήστε ποιοτικά πως θα κινούνται οι δύο μάζες.
4. Αν αρχικά η μάζα στην πρώτη ευθεία ($y = z = 0$) ήταν ακίνητη στο σημείο $x(0) = 0$ ενώ η δεύτερη (στην ευθεία $x = 0, z = a$) ακίνητη στο σημείο $y(0) = y_0$, θα κινηθεί ποτέ η πρώτη;
5. Αν η πρώτη ευθεία ήταν στραμένη κατά μια γωνία ϕ επί του επιπέδου $x - y$, αφού κάνετε όλη την παραπάνω ανάλυση βρείτε σε πόσο χρόνο η πρώτη μάζα θα ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος στο όριο που η γωνία στροφής είναι πολύ μικρή ($\phi \ll 1$). Τι θα κάνει τότε η δεύτερη; [Στην περίπτωση αυτή οι καρτεσιανές συντεταγμένες της πρώτης μάζας σε μια τυχαία θέση r κατά μήκος της στραμένης ευθείας θα είναι $(r \cos \phi, r \sin \phi, 0)$.]

Δίδονται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\begin{aligned}\cos a - \cos b &= 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{b-a}{2} \right) \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{b-a}{2} \right)\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες) Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q (όπου $q = -|q|$, αρνητικό φορτίο) είναι υποχρεωμένο να κινείται σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας R δίχως τριβές. Η στεφάνη βρίσκεται μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ κάθετο στο επίπεδο της στεφάνης και **δεν** υπάρχει βαρυτικό πεδίο. Σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες το ανυσματικό δυναμικό για ένα τέτοιο πεδίο είναι

$$\vec{A} = \frac{|\vec{B}|r}{2}\hat{e}_\theta.$$

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου αυτού εισάγοντας κατευθείαν στη Λαγκρανζιανή το δεσμό της στεφάνης (όχι έμμεσα, μέσω πολλαπλασιαστών Lagrange).
2. Βρείτε τη διατηρούμενη ποσότητα του συστήματος.
3. Τώρα εισάγετε το δεσμό της στεφάνης μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange της μορφής $\lambda(r - R)$ στη Λαγκρανζιανή (αγνοήστε το δεσμό σχετικά με το z θεωρώντας ότι το σωματίδιο κινείται σε επίπεδο). Αφού λύστε τις εξισώσεις Euler-Lagrange βρείτε τις δύο τιμές της γωνιακής ταχύτητας για τις οποίες μηδενίζεται η δύναμη της αντίδρασης λ .
4. Τι φορά έχει η αντίδραση της στεφάνης για γωνιακές ταχύτητες μεταξύ των δύο αυτών τιμών; Εξηγήστε ποιοτικά τι συμβαίνει.

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)

1. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή H ενός σωματιδίου που κινείται στον τρισδιάστατο κόσμο στο ομογενές πεδίο βαρύτητας.
2. Δείξτε ότι ισχύει

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3$$

και εξηγήστε πώς προκύπτουν αυτές οι σχέσεις.

3. Εκφράστε ομοίως τη δεύτερη και την τρίτη χρονική παράγωγο των συντεταγμένων d^2x_i/dt^2 , d^3x_i/dt^3 .
4. Εκφράζοντας τη θέση του σωματιδίου οποιαδήποτε στιγμή ως ένα ανάπτυγμα Taylor

$$x_i(t) = x_i(0) + \dot{x}_i(0)t + \ddot{x}_i(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

υπολογίστε για τη Χαμιλτονιανή του ερωτήματος (1) τις απαιτούμενες αγκύλες Poisson για να προσδιορίσετε την τροχιά του σωματιδίου συναρτήσει των αρχικών συνθηκών.