ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική II

7 Οκτωβρίου 2006

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (30 μονάδες) Μπίλια σε ρουλέτα. Σωματίδιο μάζας m είναι αναγκασμένο να κινείται επί της επιφάνειας σφαίρας αντίνας l, στο πεδίο βαρύτητας. Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την κίνηση είναι:

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

1. Σχεδιάστε τη γεωμετρία που περιγράφει το παραπάνω σύστημα σημειώνοντας με σαφήνεια τις γωνίες. Ποιο επίπεδο έχει θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε μηδενική δυναμική ενέργεια;

2. Προσδιορίστε δύο διατηρούμενες ποσότητες του συστήματος. Αναφέρατε γιατί διατηρούνται οι ποσότητες αυτές (είναι συνέπεια ποιας συμμετρίας;).

3. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω διατηρούμενες ποσότητες δείξτε ότι αν αρχικά το σωματίδιο βληθεί επί της σφαίρας με οριζόντια ταχύτητα v από σημείο που είναι σε βάθος D, $(D \leq l)$ κάτω από το ισημερινό επίπεδο της σφαίρας, το σωματίδιο διαγράφει μια τροχιά η οποία όταν περνά από το μέγιστο ή το ελάχιστο ύψος βρίσκεται σε γωνιακή θέση θ η οποία σχετίζεται με την αρχική θέση βολής $\cos\theta_0 = D/l$ βάσει της σχέσης

   $$\frac{v^2}{2gl}\left(\frac{\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = \cos\theta - \cos\theta_0$$

   Προσδιορίστε την v που απαιτείται (α) για να καταφέρει το σωματίδιο να περάσει "ξυστά" από το ισημερινό επίπεδο και (β) για να κινηθεί επί του ίδιου οριζοντίου επιπέδου που βρισκόταν αρχικά $z(t) = -D$.

4. Επιτρέπεται το σωματίδιο να περάσει από το βαθύτερο σημείο $D = l$ της σφαίρας. Πόση θα ήταν η στροφορμή του p_ϕ τότε;

ΘΕΜΑ Β (40 μονάδες) Δύο σωματίδια (όχι κατ' ανάγκη ίδιας μάζας) είναι αναγκασμένα να κινούνται δίχως τριβές πάνω σε ένα δακτύλιο ακτίνας R και συνδέονται μεταξύ τους με δύο όμοια ελατήρια σκληρότητας k και φυσικού μήκους όσο η ημιπεριφέρεια του δακτυλίου, πR, (το ένα κατά μήκος της μια ημιπεριφέρειας και το άλλο κατά μήκος της άλλης).

1. Γράψτε την Λαγκρανζιανή του συστήματος των δύο σωματιδίων. (Θεωρήστε ως σημεία αναφοράς μέτρησης των γωνιών $\theta_{1,2}$ που διαγράφουν τα δύο σωματίδια δύο αντιδιαμετρικές θέσεις του δακτυλίου ώστε τα ελατήρια να βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος όταν τα δύο σωματίδια βρίσκονται στη θέση $\theta_1 = \theta_2 = 0$.)

2. Βρείτε μια συνεχή συμμετρία της Λαγκρανζιανής και την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.

3. Αυτή η Λαγκρανζιανή περιγράφει αρμονικές ταλαντωτικές κινήσεις για απειροστές μόνο αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας ή και για πεπερασμένες; Η Λαγκρανζιανή αυτή είναι σωστή για οσοδήποτε μεγάλες τιμές των γωνιών ή πρέπει να θεωρήσει κανείς σωστή τη λύση που παίρνει από αυτή υπό κάποιους περιορισμούς; [Τα σωματίδια έχουν τη δυνατότητα να περνούν χωρίς πρόβλημα το ένα μέσα από το άλλο.]

4. Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες.

5. Γράψτε τη γενική λύση του συστήματος. Πειραματιζόμενοι με το σύστημα βλέπουμε ότι αν θέσουμε ως αρχικές συνθήκες $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ και $\dot{\theta}_1(0) = \Omega_0 = \pi\sqrt{8k/M}$, $\dot{\theta}_2(0) = 0$, όπου $M = m_1+m_2$, τότε τα δύο σωματίδια καθώς κινούνται πλησιάζουν μέχρι σε μηδενική απόσταση. Ποιος ο λόγος των μαζών των σωματιδίων;

6. Αν γνωρίζετε τη συνολική μάζα M διερευνίστε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές ταχύτητες $\dot{\theta}_1(0)$, $\dot{\theta}_2(0)$ (δεδομένου ότι πάλι $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$) ώστε οι λύσεις που βρήκατε στο ερώτημα (5) να εξακολουθούν να είναι σωστές (να μην έχουμε φόβο να ξεπεράσουμε τους περιορισμούς του ερωτήματος (3).)

ΘΕΜΑ Γ (30 μονάδες) Η κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου $x(t)$ μετράται σε ένα σύστημα αναφοράς το οποίο **δεν** είναι κατ᾽ ανάγκη αδρανειακό αλλά κινείται ως προς ένα αδρανειακό σύμφωνα με το νόμο $\Psi(t)$ (για ευκολία έχουμε θεωρήσει ότι ο κόσμος είναι μονοδιάστατος οπότε και το ελεύθερο σωματίδιο και το μη αδρανειακό σύστημα κινούνται κατά μήκος του άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος).

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου σε αυτό το σύστημα αναφοράς και στη συνέχεια κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή του.

2. Από τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου κατασκευάστε τη μη ελαχιστοποιημένη δράση του σωματιδίου και δείξτε ότι αν $\Psi(t) = kt$, τότε η δράση του σωματιδίου για δεδομένη αρχική και τελική θέση αυτού (x_1, x_2) ως προς το "περίεργο" σύστημα αναφοράς διαφέρει από τη γνωστή δράση για ελεύθερο σωματίδιο κατά μια ποσότητα που εξαρτάται μόνο από τις αρχικές και τελικές θέσεις και το χρόνο που μεσολάβησε και όχι από την ακριβή συνάρτηση του $x(t)$.

3. Για τυχαίο $\Psi(t)$ γράψτε τις εξισώσεις του Hamilton και λύστε τις.

4. Είναι η Χαμιλτονιανή σταθερά της κίνησης;

5. Η ταχύτητα στον χώρο των φάσεων είναι $(\dot{x}, \dot{p})$. Περιγράψτε την κίνηση στο χώρο των φάσεων σχεδιάζοντας και τη θέση του συστήματος στο χώρο των φάσεων σε 3 διαδοχικά ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Είναι ισαπέχουσες και οι θέσεις;

Λύσεις ΘΕΜΑ Α

1. Η γωνία ϕ είναι η γωνία περιστροφής γύρω από τον άξονα συμμετρίας z. Η γωνία θ μετρά τη γωνιακή θέση από το κατώτερο σημείο της σφαίρας. Το ισημερινό επίπεδο αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια 0.

2. Από συμμετρία μετάθεσης της γωνίας ϕ (στην ουσία συμμετρία στροφής γύρω από τον άξονα z) διατηρείται η ορμή p_ϕ (στην ουσία η z-συνιστώσα της στροφορμής).

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml^2 \dot{\phi} \sin^2\theta.$$

Από τη μη χρονοεξάρτηση της L διατηρείται το ολοκλήρωμα Jacobi, η ενέργεια

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mgl\cos\theta.$$

3. $v = l\sin\theta_0\dot{\phi}_0$. Εισάγοντας τη σχέση για την ορμή $v = p_\phi/(ml\sin\theta_0)$. Αν αντικαταστήσουμε στη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ των 2 ακραίων σημείων (αρχικό και στον ισημερινό) τις $\dot{\phi}$ από την p_ϕ και όντας σημεία που $\dot{\theta} = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{ml^2}{2}\left(\frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}\right)^2 \sin^2\theta - mgl\cos\theta = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta_0}\right)^2 \sin^2\theta_0 - mgl\cos\theta_0 \Rightarrow \quad & (1)\\
\frac{v^2\sin^2\theta_0}{2\sin^2\theta} - gl\cos\theta = \frac{v^2}{2} - gl\cos\theta_0 \Rightarrow \quad & (2)\\
\frac{v^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} - 1\right) = gl(\cos\theta - \cos\theta_0) \Rightarrow \quad & (3)\\
\frac{v^2}{2gl}\left(\frac{\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = \cos\theta - \cos\theta_0 \Rightarrow \quad & (4)\\
\frac{v^2}{2gl}\left(\frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{1 - \cos^2\theta}\right) = 1 \quad & (5)
\end{aligned}$$

Αν βάλουμε όπου $\theta = \pi/2$ (ισημερινός) και όπου $\cos\theta_0 = D/l$ βρίσκουμε $v^2 = 2gl/(D/l) = 2gl^2/D$. Αν θέσουμε ώς τελικό ακραίο σημείο το $\theta = \theta_0$ βρίσκουμε $v^2 = gl(1 - (D/l)^2)/(D/l)$.

4. Αν θέσουμε $\theta = 0$ θα έπρεπε $v = 0$ για να έχει λύση η παραπάνω εξίσωση. Εξάλλου στο σημείο αυτό θα ήταν $p_\phi = 0$ αφού η ακτίνα περιστροφής θα ήταν 0, γεγονός ασύμβατο με την αρχική κίνηση $p_\phi \neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

1. $L = \frac{R^2}{2}(m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2\dot{\theta}_2^2) - kR^2(\theta_1 - \theta_2)^2$.

2. Αν εκτελέσουμε κοινή μετάθεση των γωνιών η Λαγκρανζιανή δεν αλλάζει οπότε διατηρείται η συνολική ορμή $m_1\dot{\theta}_1 + m_2\dot{\theta}_2$.

3. Η Λαγκρανζιανή είναι γραμμικοποιημένη αλλά ισχύει μέχρι $|\theta_1 - \theta_2| \leq \pi$ αλλιώς τα σωματίδια αλλάζουν σχετική θέση και η δυναμική ενέργεια δεν εξακολουθεί να μεγαλώνει αλλά να μικραίνει αφού το ελατήριο δεν καταλαβαίνει φορά.

4. Από τη γνωστή ανάλυση βγαίνει

$$\omega_1 = 0\ ,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_2 = \sqrt{2k}\mu\ ,\ X_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα.

5. Γενική λύση

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = (at+b)X_1 + (c\cos\omega_2 t + d\sin\omega_2 t)X_2.$$

Από αρχικές συνθήκες $b+cm_2 = b-cm_1 = 0 \Rightarrow b=c=0$, και $a+dm_2\omega_2 = \Omega_0$, $a-dm_1\omega_2 = 0$. Η γωνιακή απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι $\pi + (at+dm_2\sin\omega_2 t) - (at-dm_1\sin\omega_2 t) = \pi + dM\sin\omega_2 t$. Επομένως η ελάχιστη απόσταση είναι $\pi - |d|M = \pi - M\Omega_0/(M\omega_2)$. Απ᾽ όπου συμπεραίνουμε ότι $4\mu/M = 1$ δηλαδή ίσες μάζες.

6. Αν αφαιρέσουμε μεταξύ τους τις αρχικές συνθήκες για τις ταχύτητες $dM\omega_2 = \dot\theta_1(0) - \dot\theta_2(0)$. Η γωνιακή απόσταση των σωματιδίων είναι

$$\pi + \theta_1(t) - \theta_2(t) = \pi + dM\sin\omega_2 t$$

Πρέπει λοιπόν $|\dot\theta_1(0) - \dot\theta_2(0)|/\omega_2 \le \pi$ ή $|\dot\theta_1(0) - \dot\theta_2(0) \le \Omega_0$.

ΘΕΜΑ Γ

1. $L = \frac{m}{2}(\dot x + \dot\Psi)^2$. $p = m(\dot x + \dot\Psi) \Rightarrow \dot x = (p/m) - \dot\Psi$. $H = p\dot x - L = p(\frac{p}{2m} - \dot\Psi)$.

2. $S = \int_0^T L\,dt = \frac{m}{2}(\int_0^T \dot x^2 dt + 2k\int_0^T \dot x dt + k^2 T) = S_0 + mk(x_2 - x_1) + mk^2T/2$. Συνεπώς για τέτοιο σύστημα (αδρανειακό) έχουμε αναβαθμονόμηση της δράσης και επομένως θα μπορούσε κάλιστα να χρησιμοποιηθεί η $L = m\dot x^2/2$.

3. $\dot x = (p/m) - \dot\Psi$, $p = const = p_0$. $x(t) = x(0) - \Psi(t) + \Psi(0) + (p_0 t)/m$.

4. ῞Οχι γιατί $\partial H/\partial t \neq 0$. Μόνο αν $\dot\Psi = const$ (αδρανειακό σύστημα αναφοράς) η χαμιλτονιανή διατηρείται.

5. Αφού $p = p_0$ και $x(t) = A + (p_0 t)/m + Psi(t)$ το σύστημα διαγράφει μια γραμμή παράλληλη με τον άξονα x αλλά όχι με σταθερή ταχύτητα και όχι κατ᾽ ανάγκη σταθερή φορά κίνησης. Επομένως οι θέσεις για διαδοχικές ισαπέχουσες χρονικές στιγμές δεν θα είναι κατ᾽ ανάγκη ισαπέχουσες αφού $\Psi(t+T) - \Psi(t) \neq \Psi(t+2T) - \Psi(t+T)$ για τυχαία $\Psi(t)$.