ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση επί Πτυχίω στη Μηχανική ΙΙ

3 Απριλίου 2006

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες) Ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται στο επίπεδο ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t_1 = 0$, από το σημείο (a, a) και φθάνει τη χρονική στιγμή $t_2 = T$ στο σημείο $(-b, b)$, με $a, b > 0$. Στην πορεία του γνωρίζουμε ότι το σωματίδιο περνά από το αδιαπέραστο επίπεδο $y = 0$, όπου και ανακλάται (χωρίς να γνωρίζουμε πώς).

1. Δείξτε ότι από όλες τις διαδρομές που συνδέουν το αρχικό με το τελικό σημείο και οι οποίες περνούν από το τείχος $y = 0$ στο σημείο $(x = w, y = 0)$ τη στιγμή τ, $(0 < \tau < T)$, η τεθλασμένη ευθεία η οποία περνά από αυτό το σημείο τη δεδομένη χρονική στιγμή και η οποία διαγράφεται με σταθερή ταχύτητα σε καθένα από τα δύο ευθύγραμμα τμήματά της αντιστοιχεί στην ελάχιστη δυνατή δράση.

2. Υπολογίστε την τιμή της δράσης για την τεθλασμένη αυτή ευθεία ως συνάρτηση των w, τ.

3. Στη συνέχεια δείξτε ότι στασιμοποιώντας την παραπάνω δράση και ως προς τις δύο μεταβλητές της καταλήγετε στο ότι η κίνηση του σωματιδίου θα πρέπει να γίνεται με σταθερή ταχύτητα καθόλο το μήκος της τεθλασμένης διαδρομής.

4. Τι συμπεραίνεται για τις γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης; Ποιο είναι το σημείο ανάκλασης w του σωματιδίου;

ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες) Θεωρήστε μία συνάρτηση $f(q(t), p(t))$ η οποία διαθέτει παραγώγους κάθε τάξης, η οποία είναι συνάρτηση της θέσης και της ορμής τη χρονική στιγμή t. Εάν η θέση και η ορμή εξελίσσονται χαμιλτονιανά δείξτε ότι:

$$f(q(t), p(t)) = f + \frac{t}{1!}[f, H] + \frac{t^2}{2!}[[f, H], H] + \frac{t^3}{3!}[[[f, H], H], H] + \cdots$$

όπου $f \equiv (f(q(0), p(0))$ και $H \equiv H(q(0), p(0))$ κάποια χαμιλτονιανή συνάρτηση. Υποθέστε ότι η σειρά συγκλίνει. Βασισμένοι στο παραπάνω ανάπτυγμα υπολογίστε:

1. Τα $p^2(t)$, $q^2(t)$ συναρτήσει της αρχικής θέσης και ορμής ενός ελευθέρου σωματιδίου μάζας m που κινείται σε ένα μονοδιάστατο κόσμο,

2. Τα $p(t), q(t)$ συναρτήσει της αρχικής θέσης και ορμής ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή φυσικής συχνότητας ω.

3. Την ποσότητα $x(t)p_y(t) - y(t)p_x(t)$ για ένα σωματίδιο που κινείται στο ελκτικό βαρυτικό πεδίο μιας μάζας M που είναι στερεωμένη στην αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες) Έστω δύο ακλόνητες ομοαξονικές κυκλικές στεφάνες με ακτίνες α και β. Σε κάθε μία στεφάνη κινείται χωρίς τριβή και μία σημειακή χάντρα. Στην πρώτη, η χάντρα έχει μάζα m_1 ενώ στη δεύτερη η χάντρα έχει μάζα m_2. Η πρώτη στεφάνη βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ και το κέντρο της στεφάνης είναι στο σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $(0, 0, 0)$ ενώ η δεύτερη στεφάνη είναι στο επίπεδο $z = \gamma$ και το κέντρο της στο σημείο $(0, 0, \gamma)$. Οι χάντρες έλκονται με νευτώνειου τύπου δύναμη μέτρου kl όπου l η σχετική απόσταση των χαντρών. Οι χάντρες κινούνται άνευ τριβής στις στεφάνες.

1. Θεωρήστε δύο ζεύγη πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο της κάθε στεφάνης έτσι ώστε η θέση της m_1 στο επίπεδο $z = 0$ να είναι (α, θ_1) ενώ η θέση της m_2 στο επίπεδο $z = \gamma$ να είναι (β, θ_2). Γράψτε την Λαγκραντζιανή του συστήματος $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$.

2. Γράψτε τη Λαγκραντζιανή σε συντεταγμένες "κέντρου μάζας"

$$\Theta \equiv \frac{m_1 \alpha^2 \theta_1 + m_2 \beta^2 \theta_2}{m_1 \alpha^2 + m_2 \beta^2}$$

   και σχετικής γωνίας $\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$.

3. Ποιοι χωρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν συμμετρία της παραπάνω Λαγκραντζιανής. Προσδιορίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.

4. Θεωρήστε τώρα ότι $\Theta(t) = 0$. Προσδιορίστε τις δυνατές καταστάσεις ισορροπίας των δύο χαντρών και την ευστάθειά τους κατασκευάζοντας τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις που διέπουν μικρές κινήσεις των χαντρών περί τα σημεία ισορροπίας τους.

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες) Θεωρήστε την παρακάτω διάταξη δύο σωμάτων μάζας m_1 (αριστερά) και m_2 (δεξιά) και τριών γραμμικών ελατηρίων μεταξύ δύο ακλονήτων τοίχων:

$$|| - - - - - - - - - - - \odot - - - - - - - - - - \odot - - - - - - - - - - ||$$

Το αριστερό και το δεξιό ελατήριο έχουν σταθερά k, ενώ το μεσαίο έχει σταθερά $k\,'$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα (στα 3,4,5 απαντήσετε χωρίς να κάνετε υπολογισμούς).

1. Γράψτε τη Λαγκραντζιανή που διέπει το σύστημα και από αυτήν προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης.

2. Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες.

3. Εάν $m_1 = \infty$ ποιες οι χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος;

4. Εάν $k = 0$ ποιες οι χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος;

5. Εάν $k\,' = 0$ ποιες οι χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης του συστήματος;

6. Δείξτε παίρνοντας τα αντίστοιχα όρια των χαρακτηριστικών συχνοτήτων ότι καταλήγετε στα αποτελέσματα των υποερωτημάτων 3,4,5.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. Παραμετροποιώντας την κίνηση ως

$$x = \begin{cases} \frac{w-a}{\tau}t + a + \xi_x(t) & \text{για } t \le \tau \\ \frac{-b-w}{T-\tau} + w + \eta_x(t) & \text{για } t > \tau \end{cases} , \ y = \begin{cases} \frac{-a}{\tau}t + a + \xi_y(t) & \text{για } t \le \tau \\ \frac{b}{T-\tau} + +\eta_y(t) & \text{για } t > \tau \end{cases} ,$$

   όπου οι $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ είναι τυχαίες συναρτήσεις που μηδενίζονται στα άκρα των αντίστοιχων χρονικών διαστημάτων, μπορούμε να γράψουμε τη δράση της συνολικής κίνησης και να δείξουμε άμεσα ότι αυτή ελαχιστοποιείται όταν $\xi_x = \xi_y = \eta_x = \eta_y = 0$. Επομένως η κίνηση με την ελάχιστη δράση είναι η ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα στο κάθε ευθύγραμμο διάστημα.

2. Αντικαθιστώντας την ελαχιστοποιούσα εξίσωση κίνησης στη δράση βρίσκουμε

$$S = \frac{1}{2}m\left[\frac{(w-a)^2 + a^2}{\tau} + \frac{(b+w)^2 + b^2}{T-\tau}\right]$$

3. Από $\partial S/\partial w = \partial S/\partial \tau = 0$ παίρνουμε

$$\frac{w-a}{\tau} + \frac{b+w}{T-\tau} = 0 \ , \ -\frac{(w-a)^2 + a^2}{\tau^2} + \frac{(b+w)^2 + b^2}{(T-\tau)^2} = 0$$

   Η πρώτη σημαίνει ότι η x-συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίδια στα δύο τμήματα ενώ η δεύτερη ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι ίδιο. Με πράξεις καταλήγουμε ότι $w = 0$ και $\tau = aT/(a+b)$.

4. Αφού $w = 0$ η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης και ίση με 45°.

ΘΕΜΑ Β

1. Αν φανταστούμε την f ως συνάρτηση του χρόνου

$$f(t) = f(0) + t\dot{f}(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{f}(0) + \ldots \tag{1}$$

   Γνωρίζουμε όμως ότι $\dot{f} = [f, H]$ και το ίδιο ισχύει και για την $\dot{f}$ κοκ. Οπότε αμέσως παίρνουμε το ζητούμενο.

2. Για το ελέυθερο σωμάτιο όπου $H = p^2/2m$

$$[q^2, H] = 2qp/m \ , \ [p^2, H] = 0$$

   και

$$[[q^2, H], H] = [2qp/m, p^2/2m] = 2p^2/m = 4H$$

   και οι ανώτερης τάξης αγκύλες μηδενίζονται. ΄Ετσι

$$q^2(t) = q^2(0) + 2q(0)p(0)t/m + 2Et^2 \ , \ p^2(t) = p^2(0)$$

3. ΄Ομοια για τον ταλαντωτή με $H = p^2/2m + m\omega^2q^2/2$

$$[q, H] = p/m \ , \ [p, H] = -m\omega^2 q$$

   Επομένως

$$\begin{aligned} q(t) &= q(0) + t(p(0)/m) + \frac{1}{2}t^2(-\omega^2 q(0)) + \frac{1}{3}t^3(-\omega^2 p(0)/m) + \ldots \\ &= q(0)(1 - \omega^2 t^2/2 + \ldots) + (p(0)/m\omega)(t\omega - t^3\omega^3 + \ldots) \\ &= q(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t \end{aligned} \tag{2}$$

   ΄Ομοια και για

$$p(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega q(0)\sin\omega t$$

4. Για $H = p^2/2m + V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

$$[xp_y - yp_x, H] = p_y\frac{p_x}{m} - p_x\frac{p_y}{m} - x\frac{\partial V}{\partial y} + y\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Επομένως $x(t)p_y(t) - y(t)p_x(t) = x(0)p_y(0) - y(0)p_x(0)$

ΘΕΜΑ Γ

1.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\alpha^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\beta^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}kl^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\alpha^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\beta^2\dot{\theta}_2^2 - \\ &\quad \frac{1}{2}k(\gamma^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos(\theta_2-\theta_1))^2 \end{aligned} \tag{3}$$

2. Αντικαθιστώντας τις δοσμένες νέες συντεταγμένες παίρνουμε

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\alpha^2\left(\dot{\Theta} + \frac{m_2\beta^2}{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\beta^2\left(\dot{\Theta} - \frac{m_1\alpha^2}{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}\dot{\theta}\right)^2 - \\ &\quad \frac{1}{2}k(\gamma^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\theta)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1\alpha^2+m_2\beta^2)\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1\alpha^2 m_2\beta^2}{m_1\alpha^2+m_2\beta^2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(\gamma^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\theta)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

3. Προφανώς η Θ όντας κυκλική η L είναι συμμετρική σε μεταθέσεις της Θ με αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα τη συζυγή ορμή της $L_\Theta = (m_1\alpha^2 + m_2\beta^2)\dot{\Theta}$ δηλαδή τη $\dot{\Theta}$.

4. Για $\Theta(t) = 0$, ονομάζοντας $M = (m_1 m_2 \alpha\beta)/(m_1\alpha^2 + m_2\beta^2)$ και σβήνοντας τους σταθερούς όρους της δυναμικής ενέργειας καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης

$$M\ddot{\theta} = -ksin\theta$$

η οποία έχει σημεία ισορροπίας τα $\theta = 0, \pi$. Το πρώτο είναι ευσταθές και το δεύτερο ασταθές. Η γραμμικοποίηση οδηγεί σε

$$sin\theta \simeq x = \begin{cases} \theta & \text{για } \theta \simeq 0 \\ \pi - \theta & \text{για } \theta \simeq \pi \end{cases} \tag{5}$$

δηλαδή σε ανάλογο πρόσημο της θ με την ευστάθεια/αστάθεια του συστήματος. Η δε περίοδος μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας είναι $T = 2\pi\sqrt{M/k}$.

ΘΕΜΑ Δ

1.

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(kx_1^2 + kx_2^2 + k'(x_1-x_2)^2$$

όπου τα x_1, x_2 μετρώνται από τη θέση ισορροπίας τους. Οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{6}$$

Από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(V - M\omega^2) = 0$ βρίσκουμε

$$\omega^2 = \frac{k+k'}{2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{k+k'}{2\mu}\right)^2 - \frac{(k+k')^2 - k'^2}{m_1 m_2}}$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος

2. Αν $m_1 \to \infty$, οι δύο συχνότητες είναι $(k+k')/m_2$ και 0, αφού το ένα λόγω μεγάλης μάζας είναι ακίνητο και το άλλο ταλαντώνεται υπό την επίδραση και των 2 ελατηρίων.

3. Αν $k \to \infty$, οι δύο συχνότητες είναι k'/μ και 0, αφού τα 2 σώματα συνδέονται με ένα ελατήριο αλλά είναι και ελέυθερα να κινούνται ομαλά και τα 2 μαζί.

4. Αν $k' \to \infty$, οι δύο συχνότητες είναι k/m_1 και k/m_2, αφού τα 2 σώματα είναι ανεξάρτητα.

5. Πράξεις.