



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ II
Ιούνιος 2004

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 θέματα με σαφήνεια και συντομία. Η πλήρης απάντηση θέματος εκτιμάται ιδιαίτερα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Σε ένα παράξενο μονοδιάστατο κόσμο η λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός σωματιδίου που βρίσκεται στη θέση x είναι

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^4 - V(x).$$

(α) Ο κόσμος αυτός διαθέτει τη γαλιλαϊκή συμμετρία όταν το σωματίδιο είναι ελεύθερο ($V(x) = 0$); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Υπολογίστε την κανονική ορμή του σωματιδίου.

(γ) Γράψτε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση του σωματιδίου, $H(x, p)$.

(δ) Υπολογίστε την $\frac{dH}{dt}$ επί της φυσικής τροχιάς του σωματιδίου.

(ε) Διατηρείται η ποσότητα $E = \frac{m}{2} \dot{x}^4 + V(x)$ κατά την κίνηση;

Θέμα 2 (35 μονάδες)

Ένα σωματίδιο κινείται σε έναν μονοδιάστατο κόσμο πεπερασμένου μήκους L με απολύτως ανακλώντα τοιχώματα. Κάποια στιγμή, $t = 0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $L/2$. Στην ίδια ακριβώς θέση βρίσκεται και τη χρονική στιγμή $t = T$. (α) Ποια τροχιά $x(t)$ καθιστά τη δράση στάσιμη μεταξύ δύο διαδοχικών ανακλάσεων στα τοιχώματα; (β) Υπολογίστε τη δράση ως συνάρτηση των διαδοχικών χρόνων στα οποία συμβαίνουν οι ανακλάσεις $t_1, t_2, \dots, t_N$. (γ) Από τη στασιμοποίηση αυτής της δράσης υπολογίστε τους χρόνους αυτούς και ολόκληρη τη δράση μετά τη στασιμοποίηση αυτής. (δ) Γνωρίζουμε που βρισκόταν το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = T/2$; (ε) Το πλήθος των ανακλάσεων N είναι δυνατόν να υπολογιστεί αν γνωρίζουμε μόνο τα αρχικά και τα τελικά σημεία στο χώρο και το χρόνο του σωματιδίου; (στ) Υποθέστε ότι μεταξύ της αρχικής και της τελικής χρονικής στιγμής μεσολαβούν δύο ανακλάσεις στα τοιχώματα. Είναι η τιμή της δράσης που υπολογίσατε τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο; Πότε είναι ολικό ελάχιστο ή μέγιστο; [10 επιπλέον μονάδες]

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Δύο σωματίδια είναι συνδεδεμένα με γραμμικά ελατήρια και κινούνται επί του άξονα των ελατηρίων μεταξύ δύο ακλόνητων τοίχων στη διάταξη

||-----O-----O-----||.

Οι μάζες του κάθε σωματιδίου είναι m και οι σταθερές των ακραίων ελατηρίων είναι k_1 ενώ του μεσαίου ελατηρίου είναι k_2 . Τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος στη θέση ισορροπίας του συστήματος που φαίνεται στην παραπάνω διάταξη. Το σύστημα έχει δύο χαρακτηριστικές συχνότητες, τη χαμηλή συχνότητα $\omega_l = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ και την υψηλή συχνότητα $\omega_h = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$.

(α) Προσδιορίστε στηριζόμενοι στη συμμετρία του προβλήματος, χωρίς να προβείτε σε υπολογισμό, τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης και εξηγήστε με τον τρόπο αυτό γιατί έχουν αυτές τις τιμές οι χαρακτηριστικές συχνότητες.

(β) Υποθέστε ότι αρχικά η δεξιά μάζα μετακινείται κατά a από το σημείο ισορροπίας ενώ η άλλη μάζα βρίσκεται στο σημείο ισορροπίας της. Οι μάζες είναι αρχικά ακίνητες. Προσδιορίστε τη μετέπειτα κίνησή τους. [Υπόδειξη: Γνωρίζετε τι κίνηση εκτελεί κάθε χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης. Χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα των εξισώσεων κίνησης για να σχηματίσετε εκείνο το γραμμικό συνδυασμό των χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.]

(γ) Υπολογίστε για τις αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (β) την κινητική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει του χρόνου.

(δ) Εάν δεν κάνατε λάθος στις πράξεις θα πρέπει η απάντηση στο (γ) ερώτημα να περιέχει δύο όρους, ο ένας πολλαπλάσιος του $\sin^2 \omega_l t$ και ο άλλος του $\sin^2 \omega_h t$. Γιατί δεν υπάρχουν όροι με συνημίτονα; Χρησιμοποιήστε ένα γενικό επιχείρημα βασισμένο στη διατήρηση της ενέργειας για να εξηγήσετε γιατί δεν εμφανίζονται γινόμενα της μορφής $\sin \omega_l t \sin \omega_h t$. Είναι γενική αυτή η παρατήρηση σε συστήματα με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας;

Θέμα 4 (25 μονάδες)

Ένα φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο q και μάζα m είναι αναγκασμένο να κινείται επί της επίπεδης τροχιάς $y = f(x)$. Το σύστημα βρίσκεται εντός

ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $\vec{B} = B\hat{z}$. (α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος με έναν πολλαπλασιαστή Lagrange που να επιβάλλει το συγκεκριμένο δεσμό ή ισοδύναμα με ένα φανταστικό πολύ σκληρό δυναμικό που να επιβάλλει το δεσμό. [Υπόδειξη: Θεωρήστε κίνηση επί του επιπέδου x - y και αντιστοίχως μια δισδιάστατη Λαγκρανζιανή. Δίδεται ότι το ανυσματικό δυναμικό για ένα τέτοια μαγνητικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως $\vec{A} = (B/2)(-y, x, 0)$.]

(β) Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Ποία είναι η δύναμη που ασκείται από το σύνδεσμο;

(γ) Δείξτε ότι διατηρείται η κινητική ενέργεια του σωματιδίου και ότι το έργο από τις δυνάμεις του δεσμού είναι μηδενικό.

(δ) Πόση είναι αυτή η δύναμη αν το σωματίδιο κινείται επί της ευθείας $y = a = \text{σταθ}$;

(ε) Πόση είναι η δύναμη αν το σωματίδιο κινείται επί κυκλικής τροχιάς με ακτίνα $R = mu/qB$, όπου u η σταθερή ταχύτητα του σωματιδίου; [Θεωρήστε ότι η κυκλική τροχιά έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων και γράψτε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με τη θέση στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης.]

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1: (α) Όχι. Η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου απαιτείται να είναι τετραγωνική ως προς τις ταχύτητες προκειμένου να διαθέτει τη γαλιλαϊκή συμμετρία. Εξάλλου αν $x \rightarrow X = x - Vt$ η Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή

$$L(X, \dot{X}) = \frac{m}{2}(\dot{X} + V)^4 = \frac{m}{2}(\dot{X})^4 + \frac{m}{2}(4\dot{X}^3V + 6\dot{X}^2V^2 + 4\dot{X}V^3 + V^4)$$

Ο δεύτερος όρος δεν είναι τέλεια χρονική παράγωγος αφού για παράδειγμα δεν υπάρχει συνάρτηση του X , $f(X)$ τέτοια ώστε $df/dt = V\dot{X}^3$. Επομένως η νέα Λαγκρανζιανή δεν είναι ισοδύναμη με την παλιά.

(β) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}^3 \Rightarrow \dot{x} = (p/2m)^{1/3}.$

(γ)
$$H = \dot{x}p - L = p(p/2m)^{1/3} - \frac{m}{2}(p/2m)^{4/3} + V(x) = \left(\frac{p}{2m}\right)^{4/3} \left(2m - \frac{m}{2}\right) + V(x) =$$

$$= \frac{3m}{2} \left(\frac{p}{2m}\right)^{4/3} + V(x)$$

(δ) Αφού η Χαμιλτονιανή δεν έχει εξάρτηση από το χρόνο θα είναι $dH/dt = 0$.

(ε) Η Χαμιλτονιανή είναι η ενέργεια του σωματιδίου και επομένως η ενέργεια διατηρείται. Η έκφραση που δίδεται δεν διατηρείται. Διατηρείται μόνο όταν η ορμή είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2 (α) Το σωματίδιο μεταξύ κρούσεων ακολουθεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, αυτή ελαχιστοποιεί τη δράση για το τμήμα αυτό της κίνησης. (β) Η δράση θα είναι

$$\frac{2S}{m} = \frac{(L/2)^2}{t_1} + \frac{L^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{L^2}{t_n - t_{n-1}} + \frac{(L/2)^2}{T - t_n}.$$

Για την ελαχιστοποίηση απαιτούμε $\frac{\partial S}{\partial t_i} = 0$, οπότε για παράδειγμα για $i = 2$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{L^2}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{L^2}{(t_3 - t_2)^2}$$

και συνεπώς $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$, και παρομοίως για τις άλλες κρούσεις. Άρα τα χρονικά διαστήματα μεταξύ κρούσεων είναι σταθερά και η ταχύτητα του σωματιδίου πάλι σταθερή. Το αυτό ισχύει για παραγωγή ως προς το t_1 και το t_n . Το σωματίδιο θα έχει συνεχώς σταθερή ταχύτητα.

(γ) Η συνθήκη να είναι σταθερή η ταχύτητα που προκύπτει από την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου της δράσης δεν προσδιορίζει την τροχιά. Το σωματίδιο μπορεί να εκτελέσει 0,1,2,3,4,.....κρούσεις με αντίστοιχες ταχύτητες $v = \frac{kL}{T}$ όπου k ο

αριθμός των κρούσεων. (δ) Στο χρόνο $T/2$ το σωματίδιο είτε βρίσκεται σε ένα από τα δύο άκρα ή στο σημείο εκκίνησης και κατάληξης στο μέσο του διαστήματος. Η δράση δε σε κάθε από αυτές τις φυσικές τροχιές είναι

$$S = \frac{mL^2T^2}{2}k^2. \quad (\epsilon) \text{ Για να προσδιορισθεί η τροχιά απαιτείται περαιτέρω}$$

πληροφορία είτε ότι η τροχιά είναι ολικό ελάχιστο, ή γνώση της αρχικής ταχύτητας του σωματιδίου! (στ) Ας υποθέσουμε ότι γίνονται μόνο δύο κρούσεις.

$$\text{Τότε θέτω } u^2 = \frac{L^2}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{L/4^2}{t_1^2} = \frac{L/4^2}{t_2^2}, \text{ από τη στασιμοποίηση της δράσης,}$$

οπότε το είδος του ακροτάτου κρίνεται από το πρόσημο του πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2} \end{pmatrix} = \frac{u^2}{t_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ και ο πίνακας αυτός είναι θετικός επειδή είναι}$$

συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές $3 \pm \sqrt{8} > 0$. Δηλαδή πρόκειται περί τοπικού ελαχίστου. Αυτό ισχύει και γενικότερα για οσοδήποτε ανακλάσεις, αφού το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με ένα σωματίδιο που διανύει απόσταση NL σε χρόνο T (ξεδίπλωμα των ανακλάσεων) και όπως γνωρίζουμε η δράση είναι τότε ολικό ελάχιστο. Στην περίπτωσή μας είναι τοπικό ελάχιστο (εκτός από την $N=0$ που είναι ολικό ελάχιστο) γιατί δεν γνωρίζουμε το πλήθος των ανακλάσεων.

ΘΕΜΑ 3: (α) Η συμμετρία επιβάλλει ότι αν οι δύο μάζες κινηθούν ανάποδα ($x_1 = -x_2$) θα κινούνται συνεχώς με τον ίδιο τρόπο. Επίσης το ίδιο θα συμβεί αν κινηθούν κατά την ίδια απόσταση ($x_1 = x_2$) Οι δύο τρόποι ταλάντωσης λοιπόν θα είναι

$$a_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Το γιατί η χαμηλή συχνότητα είναι τόσο οφείλεται στο ότι όταν τα δύο σωματίδια κινούνται κατά την ίδια απόσταση το μεσαίο ελατήριο δεν μετέχει στην κίνηση, οπότε τη συχνότητα την καθορίζουν τα ακριανά με τη μάζα των σωματιδίων. Οι

ταλαντωτές δουλεύουν σαν να ήταν ανεξάρτητοι. Έτσι $\omega_l = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$. Όταν τα

σωματίδια κινούνται ανάποδα το μεσαίο ελατήριο αλλάζει το μήκος του δύο φορές περισσότερο από τα ακριανά επομένως η δύναμη που ασκεί στα σωματίδια είναι διπλάσια της δύναμης που θα ασκούσε αν ήταν μόνο του και τεντωνόταν όσο κινείται το κάθε σωματίδιο. Η δύναμη του μεσαίου ελατηρίου προστίθεται στη δύναμη των ακριανών γιατί όταν αυτό συσπείρывается τα ακριανά

τεντώνονται και το ανάποδο. Έτσι λοιπόν $\omega_h = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}$.

(β) Ο γενικός τρόπος ταλάντωσης είναι

$$x_1(t) = A_h \sin \omega_h t + B_h \cos \omega_h t + C_l \sin \omega_l t + D_l \cos \omega_l t$$

$$x_2(t) = -A_h \sin \omega_h t - B_h \cos \omega_h t + C_l \sin \omega_l t + D_l \cos \omega_l t$$

Τα συν και πλην οφείλονται στις συνιστώσες των δύο τρόπων ταλάντωσης.

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$B_h + D_l = a, -B_h + D_l = 0, A_h \omega_l + C_h \omega_l = -A_h \omega_l + C_h \omega_l = 0$$

Συνεπώς

$$B_h = D_l = a/2, A_h = C_h = 0$$

(γ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} m \frac{a^2}{4} (\omega_h^2 \sin^2 \omega_h t + \omega_l^2 \sin^2 \omega_l t)$$

Επειδή αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο οι όροι των συνημιτόνων στην κινητική ενέργεια είναι μηδέν. Επίσης από τη στιγμή που το σύστημα είναι ισοδύναμο με άθροισμα αρμονικών ταλαντωτών, θα διατηρείται η ενέργεια σε κάθε τέτοιο ταλαντωτή και επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος θα εξελίσσεται χωριστά για τον κάθε ταλαντωτή με τη συχνότητα του ταλαντωτή αυτού. Επομένως σε ένα σύστημα συζευγμένων ταλαντωτών αναμένουμε γενικά η κινητική ενέργεια να είναι

$$T = \sum_i A_i \sin^2(\omega_i t + \phi_i).$$

ΘΕΜΑ 4 α) Η Λαγκρανζιανή είναι $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q \frac{B}{2} y \dot{x} + q \frac{B}{2} x \dot{y} - \frac{k}{2} (y - f(x))^2$

με $k \rightarrow \infty$. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m\ddot{x} - qB\dot{y} = k(y - f(x))f'(x) \equiv F_x \text{ και } m\ddot{y} + qB\dot{x} = -k(y - f(x)) \equiv F_y,$$

όπου οι συνιστώσες της δύναμης F_x, F_y από τη δέσμευση υπολογίζονται από το αριστερό μέλος της εξίσωσης επιβάλλοντας τη συνθήκη $y = f(x)$.

β) πολλαπλασιάζοντας την x -συνιστώσα της εξίσωσης της κίνησης με $\dot{x}$ και την y -συνιστώσα με το $\dot{y}$ και αθροίζοντας προκύπτει:

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = k(y - f(x))[f'(x)\dot{x} - \dot{y}] = 0,$$

αφού το έργο από τη μαγνητική δύναμη μηδενίζεται (η μαγνητική δύναμη είναι κάθετη στη ταχύτητα) και το έργο από την αντίδραση των συνδέσμων και αυτό μηδενίζεται δεδομένου ότι $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$. Συνεπώς η κινητική ενέργεια

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

διατηρείται κατά τη κίνηση, δηλαδή διατηρείται το μέτρο της ταχύτητας.

[Άλλος τρόπος να το δείτε αυτό είναι: επειδή η λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση διατηρείται κατά τη κίνηση η ολική ενέργεια που δίνεται από το ολοκλήρωμα του Γιακόμπι. Αν κάνετε τον υπολογισμό αυτόν ο μεν μαγνητικός

όρος εξαφανίζεται, και προκύπτει ότι η ποσότητα $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(y - f(x))^2$

διατηρείται κατά τη κίνηση. Αλλά στο όριο $k \rightarrow \infty$ επιβάλλοντας τον δεσμό $\frac{k}{2}(y - f(x))^2 \rightarrow 0$ δεδομένου ότι η ποσότητα $k(y - f(x))$ έχει πεπερασμένο όριο

και όταν $k \rightarrow \infty$ είναι $y \rightarrow f(x)$. Οπότε όπως και προηγουμένως διατηρείται η κινητική ενέργεια---δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας.]

(γ) Όταν $\mathbf{y} = \mathbf{a} = \text{σταθ}$ θα είναι $\dot{y} = 0$ και από τη διατήρηση του μέτρου της ταχύτητας $\dot{x} = \text{σταθ}$, και άρα $\ddot{x} = 0$. Συνεπώς

$$F_x = m\ddot{x} - qB\dot{y} = 0 \text{ και } F_y = m\ddot{y} + qB\dot{x} = qB\dot{x} = \text{σταθερά.}$$

(ε) Θεωρούμε αρχές των αξόνων στο κέντρο του κύκλου τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις είτε το σωματίδιο κινείται με του δείκτες του ρολογιού οπότε

(I) $\dot{x} = \Omega y$ και $\dot{y} = -\Omega x$ είτε αντίθετα από τους δείκτες οπότε (II) $\dot{x} = -\Omega y$ και $\dot{y} = \Omega x$

το $\Omega = \frac{u}{R} = \frac{qB}{m} > 0$ (θεωρείται πάντα θετικό). Και στις δύο περιπτώσεις $\ddot{x} = -\Omega^2 x$

και $\ddot{y} = -\Omega^2 y$.

Στην (I) $F_x = m\ddot{x} - qB\dot{y} = -m\Omega^2 x + qB\Omega x = 0$ και

$F_y = m\ddot{y} + qB\dot{x} = -m\Omega^2 y + qB\Omega y = 0$. Οι δυνάμεις από το δεσμό είναι μηδενικές --η κίνηση με φορά αντίθετη με τους δείκτες του ρολογιού είναι φυσική κίνηση, Ενώ για την περίπτωση (II)

$$F_x = m\ddot{x} - qB\dot{y} = -m\Omega^2 x - qB\Omega x = -2m\Omega^2 x$$

και

$$F_y = m\ddot{y} + qB\dot{x} = -m\Omega^2 y - qB\Omega y = -2m\Omega^2 y,$$

οπότε η δύναμη που ασκείται από το δεσμό είναι ακτινική

$$\vec{F} = -2m\Omega^2 R \hat{r}$$

και διπλάσια σε μέτρο από το κεντρομόλο.