



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II 16 Ιουνίου 2005

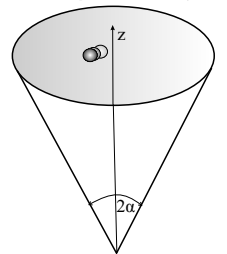
Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαίτερος. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες) Σωματίδιο μάζας m κινείται επί της εσωτερικής επιφάνειας ενός ανεστραμένου ορθού κώνου ημι-γωνίας α , όπως φαίνεται στο σχήμα, μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης g . Η θέση του σωματιδίου προσδιορίζεται πλήρως από το ύψος από την κορυφή του κώνου z , και την πολική γωνία ϕ .

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση του σωματιδίου.
2. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και δείξτε ότι η στροφορμή, p_ϕ , διατηρείται.
3. Αντικαθιστώντας τη σταθερά p_ϕ γράψτε την εξίσωση μεταβολής του ύψους. Δείξτε ότι μία λύση των εξισώσεων κίνησης είναι μία κυκλική τροχιά σε σταθερό ύψος z_c και προσδιορίστε το ύψος z_c συναρτήσει της στροφορμής p_ϕ , και των m , g και α .
4. Εάν το σωματίδιο ενώ εκτελεί κυκλική κίνηση διαταραχθεί ελαφρώς στιγμιαία χωρίς να αλλάξει η στροφορμή του, δείξτε ότι το ύψος του σωματιδίου θα αρχίσει να ταλαντώνεται περί το z_c με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{z_c}{3g}}.$$



ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες) Λεπτή αλυσίδα γραμμικής πυκνότητας μ και μήκους l ισορροπεί στο κατακόρυφο επίπεδο (x, y) με τα δύο άκρα της αναρτημένα στα σημεία $(\pm a, 0)$, με $a < l/2$. Η αλυσίδα βρίσκεται στο κατακόρυφο ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης $(0, -g)$ και λαμβάνει το σχήμα $y(x)$ που καθιστά στάσιμη τη δυναμική της ενέργεια.

1. Γράψτε το συναρτησοειδές, $S[y(x)] = \int_{-a}^a L(y, y') dx$, όπου $y'(x) = dy/dx$, η στασιμοποίηση του οποίου προσδιορίζει το σχήμα της αλυσίδας στην κατάσταση ισορροπίας. Γράψτε την εξίσωση η λύση της οποίας προσδιορίζει το σχήμα τις αλυσίδας. Τι συνοριακές συνθήκες πρέπει να επιβληθούν στη διαφορική εξίσωση;
2. Θεωρήστε τώρα ότι στο μέσο της αλυσίδας αναρτάται μία επιπλέον σημειακή μάζα m . Το συναρτησοειδές που πρέπει τώρα να στασιμοποιηθεί είναι το $I[y(x)] = \int_{-a}^a L(y, y') dx + mgy(0)$. Το σχήμα ισορροπίας αναμένεται να δίνεται από μία συνεχή συνάρτηση $y(x)$ αλλά η dy/dx να παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x = 0$. Δείξτε ότι προσεκτική εφαρμογή του λογισμού των μεταβολών σε αυτό το συναρτησοειδές (λαμβάνοντας υπόψη την ασυνέχεια της παραγώγου) οδηγεί στην προηγούμενη μορφή σχήματος αριστερά και δεξιά του $x = 0$ και επιπλέον προσδιορίζει την ασυνέχεια της dy/dx στο $x = 0$.

ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες) Στο δεξί άκρο ενός ελατηρίου, του οποίου το αριστερό άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, είναι δεμένο σώμα μάζας m το οποίο ταλαντώνεται στη διεύθυνση x με συχνότητα ω_1^2 . Δεξιά από το σώμα συνδέουμε ένα δεύτερο ελατήριο σταθεράς $k_2 = m\omega_2^2$ που εκτείνεται στον x -άξονα, ενώ στο άλλο άκρο του ελατηρίου αυτού προσαρτούμε μία δεύτερη ίση μάζα m , η οποία και αυτή μπορεί να κινείται στη διεύθυνση x . Υποθέστε επίσης ότι στο πρώτο σώμα εξασκείται και μια περιοδική δύναμη $m\omega^2 \cos \omega t$.

1. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης στη μορφή

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K}(\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f} \cos \omega t$$

όπου x_1 η θέση της πρώτης μάζας, x_2 η θέση της δεύτερης από τις θέσεις ισορροπίας, $\mathbf{K}(\omega_1, \omega_2)$ ένας 2×2 πίνακας, $\mathbf{f}$ ένας πίνακας-στήλη 2×1 , προσδιορίζοντας τους σταθερούς πίνακες $\mathbf{K}(\omega_1, \omega_2)$ και $\mathbf{f}$.

2. Μας ενδιαφέρει η εξαναγκασμένη κίνηση του συστήματος κατά την οποία το σύστημα ταλαντώνεται με τη συχνότητα ω της ασκούμενης δύναμης, ως:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \cos \omega t .$$

Προσδιορίστε το πλάτος της διέγερσης του πρώτου σώματος $\hat{x}_1$, και σχεδιάστε το πλάτος, μαζί με το πρόσημο αυτού, συναρτήσει της συχνότητας ω της ασκούμενης δύναμης.

3. Τι σταθερά ελατηρίου k_2 πρέπει να επιλέξουμε έτσι ώστε για δεδομένη περιοδική διέγερση της πρώτης μάζας αυτή να παραμένει ακίνητη; Μπορείτε με ένα απλό επιχείρημα να καταλήξετε στο παραπάνω αποτέλεσμα; Αν θέλαμε να αποσβέσουμε την ταλάντωση ενός συστήματος πάνω στο οποίο ασκείται αρμονική εξωτερική διέγερση τι θα πρέπει να προσθέσουμε στο σύστημα;

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες) Σωματίδιο φορτίου q και μάζας m κινείται στο επίπεδο $(x, y, 0)$ εντός του κα-θέτου στο επίπεδο σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = (0, 0, B)$. Το μαγνητικό πεδίο προκύπτει από το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$.

1. Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση που διέπει την κίνηση του σωματιδίου και υπολογίστε τις κανονικές ορμές του σωματιδίου p_x και p_y τις συζυγείς στις αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγ-μένες x και y .
2. Προσδιορίστε ένα χωρικό μετασχηματισμό που να αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής και από το θεώρημα της Noether προσδιορίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.
3. Κατασκευάστε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση που διέπει την κίνηση του σωματιδίου και δείξτε ότι μπορεί να τεθεί στην εξής μορφή:

$$H = \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2) ,$$

όπου π_x, π_y δυναμικές μεταβλητές που πρέπει να προσδιορίσετε. Με ποιες ποσότητες είναι ίσες οι αριθμητικές τιμές αυτών των δυναμικών μεταβλητών;

4. Διατηρείται η Χαμιλτονιανή κατά την κίνηση;
5. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{\pi_x, \pi_y\}$
6. Βρείτε κανονικές μεταβλητές Q και P που είναι συναρτήσεις των π_x, π_y . Ποια γνώριμη μορφή λαμβάνει η Χαμιλτονιανή στις συντεταγμένες Q και P ;

7. Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον στις μεταβλητές Q και P . Με ποιο γνωστό φυσικό σύστημα είναι ισοδύναμο το παραπάνω φυσικό σύστημα;

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Επειδή $r = z \tan \alpha$ η Λαγκρανζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{z}^2 \sec^2 \alpha + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\phi}^2 \right) - mgz$$

και η κατακόρυφη εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{z} \sec^2 \alpha - z \tan^2 \alpha \dot{\phi}^2 + g = 0$$

ενώ η

$$p_\phi = mz^2 \tan^2 \alpha \dot{\phi}$$

διατηρείται. Αν αντικαταστήσουμε τη σταθερή στροφορμή στη κατακόρυφη εξίσωση κίνησης τότε λαμβάνουμε την εξίσωση για το ύψος

$$\ddot{z} \sec^2 \alpha - \frac{p_\phi^2}{m^2 z^3 \tan^2 \alpha} + g = 0$$

που επιδέχεται λύση $z = z_c$ εφόσον

$$z_c^3 = \frac{p_\phi^2}{m^2 g \tan^2 \alpha}.$$

Για τη διαταραγμένη κίνηση λαμβάνω $z = z_c + \eta$ και η γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησης της διαταραχής είναι

$$\ddot{\eta} + \frac{3p_\phi^2 \cos^2 \alpha}{m^2 z_c^4 \tan^2 \alpha} \eta = 0$$

ή

$$\ddot{\eta} + \frac{3g \cos^2 \alpha}{z_c} \eta = 0$$

που δίνει αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{z_c}{3g}}.$$

ΘΕΜΑ Β

Εάν η κατακόρυφη θέση της αλυσίδας είναι $y(x)$ τότε θέλουμε να καταστήσουμε στάσιμο το

$$V = g \int \mu y ds = g\mu \int_{-a}^a y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

όπου $y' = dy/dx$ υπό τον περιορισμό ότι:

$$l = \int_{-a}^a ds = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

Εισάγοντας τον πολλαπλασιαστή λ αρκεί να καταστήσουμε στάσιμο το:

$$S[y(x)] = V - \lambda l = \int_{-a}^a (\mu g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx$$

με λαγκραντζιανή.

$$L(y, y') = (\mu g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2}$$

Οι εξισώσεις Euler-Largange δίνουν

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(\mu g y - \lambda) y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \mu g \sqrt{1 + y'^2} = 0$$

όπου το λ πρέπει να προσδιορισθεί από το μήκος l και η λύση πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $y(\pm a) = 0$.

Προσθέτοντας τώρα τη μάζα πρέπει να καταστήσουμε στάσιμο το:

$$S[y(x)] = \int_{-a}^a (\mu g y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx + m g y(0)$$

που επειδή αναμένεται η y' να είναι ασυνεχής στο 0, χρειάζεται προσοχή στη κατασκευή των εξισώσεων Euler-Largange. Οπότε κάνουμε τον λογισμό των μεταβολών εξαρχής με προσοχή χωρίζοντας τα συνεχή από τα ασυνεχή τμήματα στη παραγωγή κατά μέρη. Έστω y_c η καμπύλη που καθιστά στάσιμη τη δυναμική ενέργεια, τότε κάνοντας μία μεταβολή $y(x) = y_c(x) + \epsilon \eta(x)$ η τάξης ϵ μεταβολή της δράσης πρέπει να μηδενίζεται. Οπότε

$$\begin{aligned} (S(\epsilon) - S(0))/\epsilon &= \int_{-a}^0 \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta' \right) dx + \int_0^a \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta' \right) dx + m g \eta(0) \\ &= \int_{-a}^a \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta dx + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta \right]_{-a}^0 + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \eta \right]_0^a + m g \eta(0) \\ &= \int_{-a}^a \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \eta dx + \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x=0^-} - \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \right]_{x=0^+} + m g \eta(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

για κάθε μεταβολή η που ικανοποιεί $\eta(\pm a) = 0$. Συνεπώς η στασιμοποίηση της δράσης απαιτεί για $x \neq 0$ να ικανοποιούνται οι Euler-Lagrange που είχαμε και προηγουμένως, και στο σημείο να ισχύει η συνθήκη ασυνέχειας:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} \Big|_{x=0^+} - \frac{\partial L}{\partial y'} \Big|_{x=0^-} = m g .$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= m \omega^2 \cos \omega t \\ m \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

οπότε

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{K}(\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f} \cos \omega t$$

με

$$\mathbf{K}(\omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$\hat{x}_1 = \frac{\omega^2(\omega_2^2 - \omega^2)}{\Delta(\omega)}$$

με

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) &= (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \omega_2^4 \\ &= \omega^4 - \omega^2(\omega_1^2 + 2\omega_2^2) + \omega_1^2\omega_2^2 \\ &= (\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2) \end{aligned}$$

όπου $\omega_{\pm}$ οι χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης είναι:

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\left(\omega_2^2 + \frac{\omega_1^2}{2}\right)^2 - \omega_1^2\omega_2^2}$$

Η απόκριση του πρώτου σώματος συναρτήσει του ω σχεδιάζεται στο σχήμα. Απειρίζεται στις συχνότητες συντονισμού που είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητες $\omega_{\pm}$, αλλά το πλέον ενδιαφέρον είναι ότι όταν $\omega = \omega_2$ η απόκριση του σώματος το οποίο διεγείρεται αρμονικά μηδενίζεται και μεταφέρεται η ταλάντωση στο δεύτερο σώμα.

Το συμπέρασμα ότι μπορεί να απορροφήσουμε την διέγερση ενός σώματος με το να το συνδέσουμε με ένα ελατήριο που έχει φυσική συχνότητα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη είναι γενικό αποτέλεσμα και δεν εξαρτάται από το ότι λάβαμε τη μάζα του δευτέρου σώματος ίση με αυτή του πρώτου. Αυτό φαίνεται αμέσως διότι αν απαιτήσω η $x_1 = 0$ να είναι λύση τότε οι εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$\begin{aligned} -k_2 x_2 &= m_1 \omega^2 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

που επιδέχονται τη λύση

$$x_2 = \frac{m_1}{m_2 \omega_2} \cos \omega t ,$$

μόνο αν όπως και προηγουμένως είναι:

$$\omega_2 = \frac{k_2}{m_2} = \omega .$$

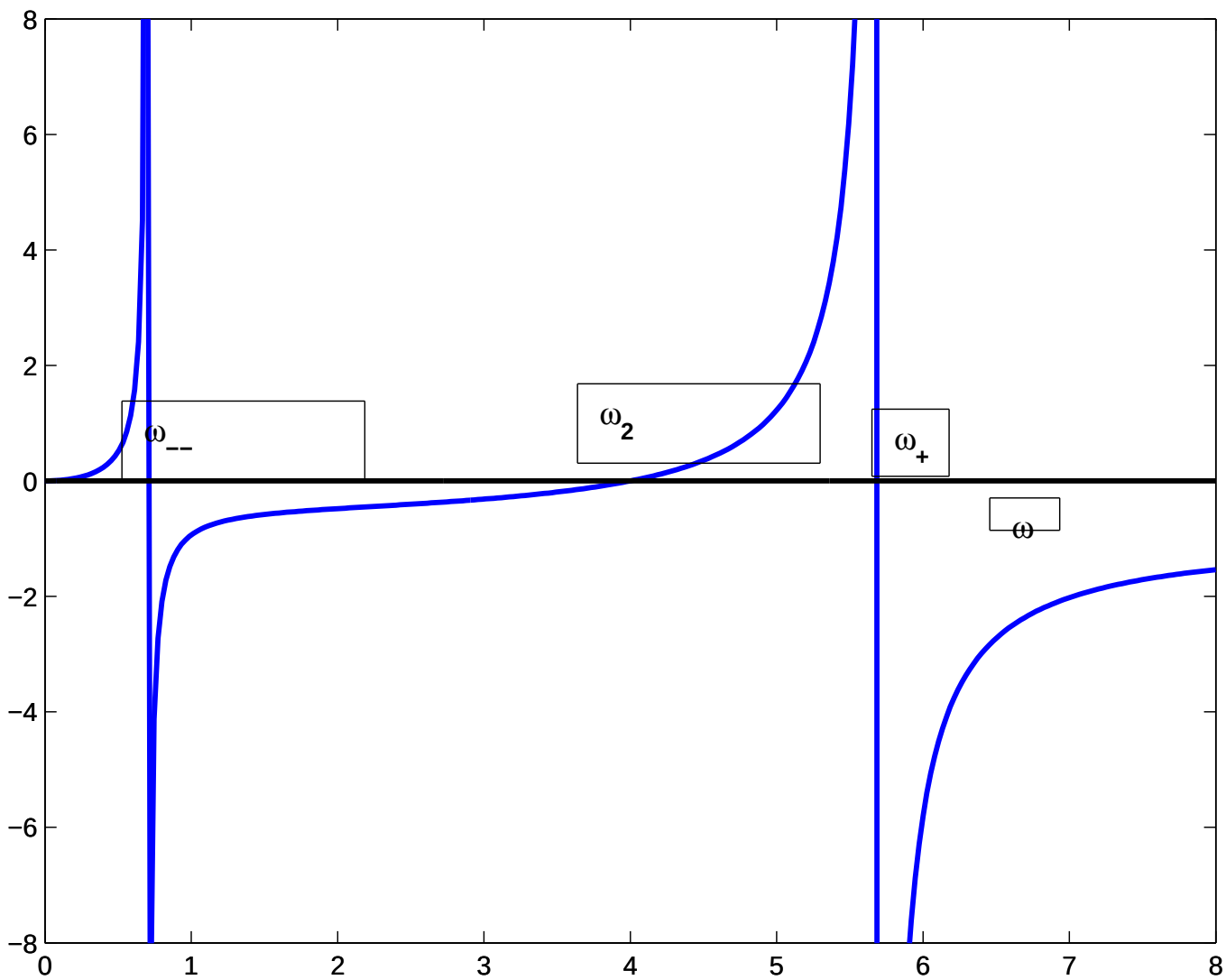
ΘΕΜΑ Δ

Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q\dot{x}A_x + q\dot{y}A_y$$

και οι γενικευμένες ορμές:

$$p_x = m\dot{x} + qA_x \quad , \quad p_y = m\dot{y} + qA_y$$



Ο συνεχής μετασχηματισμός της στροφής ως προς τον z άξονα που σε απειροστή μορφή είναι

$$x(\epsilon) = x - \epsilon y \quad , \quad y(\epsilon) = y + \epsilon x$$

αφήνει τη Λαγκραντζιανή αναλλοίωτη οπότε η ποσότητα

$$yp_x - xp_y$$

που είναι η γενικευμένη στροφορμή, διατηρείται.

Η Χαμιλτονιανή είναι

$$H = \frac{1}{2m} ((p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2) \equiv \frac{1}{2m} (\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

εάν θέσω τις μεταβλητές

$$\pi_x = p_x - qA_x \quad , \quad \pi_y = p_y - qA_y$$

που είναι αριθμητικά ίσες με τις νευτώνειες ορμές.

Η Χαμιλτονιανή διατηρείται κατά τη κίνηση. Είναι

$$\{\pi_x, \pi_y\} = qB$$

Εάν $qB > 0$ ορίζουμε

$$Q = \frac{\pi_x}{\sqrt{qB}} \quad , \quad P = \frac{\pi_y}{\sqrt{qB}}$$

αλλως αντίστροφα. Τότε

$$\{Q, P\} = 1, \quad \{Q, Q\} = 0, \quad \{P, P\} = 0$$

οπότε οι Q και P είναι κανονικές μεταβλητές με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{qB}{2m} (P^2 + Q^2)$$

που είναι η Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{qB}{m} P \\ \dot{P} &= -\frac{qB}{m} Q \end{aligned}$$

οπότε έχουμε αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $q^2 B^2 / m^2$.

Μαθαίνουμε έτσι ότι η κίνηση σε μαγνητικό πεδίο είναι ισοδύναμη με τη κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή. Αυτή η παρατήρηση έγινε από τον Landau που έδωσε το 1941 έτσι τις ενεργειακές στάθμες ενός ηλεκτρονίου που κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο.