



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική II

28 Ιουνίου 2016

Να είστε σαφείς και σύντομοι στις απαντήσεις σας (“Οι λέξεις είναι όπως τα φύλλα, όπου είναι πολλά υπάρχει λίγος ζουμερός καρπός” (Alexander Pope)). Για να περάσετε το μάθημα θα πρέπει να έχετε απαντήσει στα ερωτήματα με *.

Θέμα Α:

- 1* Θεωρήστε τον συνεχή, ως προς την παράμετρο ε , μετασχηματισμό $q(t) \rightarrow Q(\varepsilon, t)$, όπου $Q(0, t) = q(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t , και την Λαγκραντζιανή $L(q, \dot{q}, t)$ η οποία για κάθε t και ε ικανοποιεί την

$$\frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

$\dot{Q}$ είναι η παράγωγος της $Q(\varepsilon, t)$ ως προς το χρόνο t . Διατυπώστε με προσοχή και αποδείξτε με σαφήνεια το θεώρημα της Noether για αυτόν το μετασχηματισμό. [10]

- 2 Δίδεται η Λαγκραντζιανή

$$L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - V(x + y, y + z).$$

[2α] Προσδιορίστε έναν χωρικό μετασχηματισμό που αποτελεί συμμετρία της παραπάνω Λαγκραντζιανής, σύμφωνα με το ερώτημα [1] και προσδιορίστε την αντιστοιχούσα διατηρούμενη ποσότητα. [7]

[2β] Αφού γράψετε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος, δείξτε ότι η ποσότητα που προσδιορίζετε στο προηγούμενο ερώτημα [2α] είναι πράγματι σταθερά της κίνησης. [8]

Θέμα Β: Ένα σωματίδιο που κινείται σε δύο διαστάσεις διατηρεί κατά την κίνησή του τις ποσότητες $X_1 = p_y - x$, $X_2 = p_x + y$, καθώς επίσης και την ποσότητα:

$$K = \frac{1}{2} [(p_y + x)^2 + (p_x - y)^2],$$

όπου p_x, p_y είναι οι συζυγείς ορμές των συντεταγμένων θέσης x, y , αντίστοιχα. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

- 1* Χρησιμοποιώντας αγκύλες Poisson, δείξτε ότι η διατήρηση των 2 πρώτων ποσοτήτων εξασφαλίζει ότι η Χαμιλτονιανή δεν είναι οποιαδήποτε συνάρτηση των ποσοτήτων x, p_x, y, p_y , αλλά εξαρτάται μόνο από τους συνδυασμούς αυτών: $X_3 = p_x - y$, $X_4 = p_y + x$ και **όχι** από τους συνδυασμούς X_1, X_2 . [Υποδ: Χωρίς καμμία έλλειψη της γενικότητας μπορείτε να υποθέσετε ότι η Χαμιλτονιανή είναι συνάρτηση των X_1, X_2, X_3, X_4 , δηλαδή $H = H(X_1, X_2, X_3, X_4)$, αντί των x, p_x, y, p_y . Μπορείτε λοιπόν να εκφράσετε τις παραγώγους που εμφανίζονται στις αγκύλες Poisson μέσω παραγώγων ως προς τις μεταβλητές $X_i, i = 1, \dots, 4$.] [8]

- 2 Δείξτε ότι η αγκύλη Poisson $\{X_3/\sqrt{2}, X_4/\sqrt{2}\}$ είναι -1 . Επομένως οι δύο αυτές ποσότητες μπορούν να θεωρηθούν ως συζυγείς μεταβλητές θέσης $q = X_4/\sqrt{2}$ και ορμής $p = X_3/\sqrt{2}$ με αποτέλεσμα η Χαμιλτονιανή του συστήματος ως προς αυτές τις κανονικές μεταβλητές να λαμβάνει τη μορφή $H(q, p)$. [2]

3 Δείξτε, τώρα, ότι η διατήρηση της ποσότητας K συνεπάγεται ότι η ταχύτητα στο νέο χώρο φάσεων $(\dot{q}, \dot{p})$ είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης (q, p) . Εξηγήστε γιατί εφόσον η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη από το χρόνο, η Χαμιλτονιανή θα είναι απλώς μία αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση της K , $H = f(K)$. [6]

4 Υποθέστε ότι η Χαμιλτονιανή είναι: $H = K$. Δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου στις αρχικές συντεταγμένες είναι κύκλος της μορφής

$$(2x + X_1)^2 + (2y - X_2)^2 = 2K.$$
 [5]

5* Κατασκευάστε τη Λαγκραντζιανή από της Χαμιλτονιανή $H = K$ (γραμμένη ως συνάρτηση των $(p_y + x)$ και $(p_x - y)$), ώστε να προκύψει ένα αναγνωρίσιμο φυσικό σύστημα. Ποιο είναι αυτό; [4]

Θέμα Γ: Μάζα m είναι συνδεδεμένη με την αρχή των αξόνων με ένα ελατήριο σταθεράς k , ενώ μια δεύτερη ίδια μάζα m είναι συνδεδεμένη μέσω ελατηρίου σταθεράς k , με την πρώτη μάζα. Και τα δύο ελατήρια έχουν **μηδενικό φυσικό μήκος**. Η κίνηση των μαζών περιορίζεται στο επίπεδο (x, y) και πραγματοποιείται στο πεδίο βαρύτητας σταθερής έντασης g στη διεύθυνση $-y$. Η θέση της #1 στο χρόνο t είναι $(x_1(t), y_1(t))$ και της #2 είναι $(x_2(t), y_2(t))$. Η κίνηση της #2 όμως περιορίζεται έτσι ώστε να είναι $x_2 = 0$.

1* Γράψτε μία Λαγκραντζιανή που διέπει τη κίνηση του συστήματος και από αυτήν συνάγετε τις εξισώσεις κίνησης. [Μην προβείτε σε λύση αυτών.] [8]

2 Βρείτε το σημείο ισορροπίας του συστήματος x_{1e}, y_{1e}, y_{2e} . [6]

3 Δείξτε ότι διαταραχές $x'_1(t) = x_1(t) - x_{1e}$, $y'_1(t) = y_1(t) - y_{1e}$, $y'_2(t) = y_2(t) - y_{2e}$ γύρω από το σημείο ισορροπίας, ανεξαρτήτως πλάτους, διέπονται από τις εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}'_1 \\ \ddot{y}'_1 \\ \ddot{y}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad [6]$$

4 Προσδιορίστε τις συχνότητες των τριών ιδιοκαταστάσεων και περιγράψτε τους αντίστοιχους τρόπους ταλάντωσης. [5]

Θέμα Δ: Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε ένα κυκλικό δακτύλιο ακτίνας 1 δίχως τριβές. Το μοναδικό πεδίο που αισθάνεται το σωματίδιο, κινούμενο στο δακτύλιο, έχει τη μορφή:

$$V(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta)^2, & \text{για } 0 < \theta < \pi, \\ -\frac{1}{2}(\frac{3\pi}{2} - \theta)^2 + \frac{\pi^2}{4}, & \text{για } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

1* Το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο $\theta = 0$ και φτάνει στο σημείο $\theta = \pi/2$ σε χρόνο $T = \pi/2$. Να γραφεί η δράση του σωματιδίου, ως συνάρτηση της $\theta(t)$ που εκφράζει την κίνηση του σωματιδίου. [5]

2 Να συγκριθεί η τιμή της δράσης στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις: (i) $\theta_1(t) = t$, (ii) $\theta_2(t) = (\pi/2) \sin(t)$. Ποια από τις δύο κινήσεις έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να περιγράψει σωστά την κίνηση του σωματιδίου στο δακτύλιο; [$\pi^2 \simeq 10$.] [10]

3 Γράψτε την εξίσωση Euler-Lagrange για το σωματίδιο και κατασκευάστε τη λύση αυτής η οποία εκτελεί μια πλήρη κυκλική κίνηση επί του δακτυλίου. Για ποια περιοχή ενεργειών του σωματιδίου θα μπορεί να εκτελεί μια πλήρη κυκλική κίνηση αυτό; [5]

4 Αν η ενέργεια του σωματιδίου αυξηθεί, η περίοδος της περιστροφής θα αυξηθεί ή θα μειωθεί; [5]

Λύσεις

A. 1 (Η απάντηση του συμφοιτητή σας ΣΠ)

Αν ο απειροστός γεννήτωρ K κατασκευάζει τον συνεχή μετασχηματισμό $Q = q + \varepsilon K$ ο οποίος είναι συμμετρία της Λαγκραντζιανής, υπό την έννοια ότι

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = 0 ,$$

τότε η ποσότητα

$$Kp,$$

όπου p η ορμή η συζυγής προς την q , διατηρείται.

Πράγματι, αν γράψουμε

$$\begin{aligned} L(Q, \dot{Q}, t) &= L(q + \varepsilon K, \dot{q} + \varepsilon \dot{K}, t) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon K \frac{\partial L}{\partial q} + \varepsilon \dot{K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + O(\varepsilon^2) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon (K\dot{p} + \dot{K}p) + O(\varepsilon^2) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon \frac{d(Kp)}{dt} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε ότι η q αντιστοιχεί στη φυσική κίνηση και ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Άρα επειδή

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} = 0 ,$$

για κάθε ε , άρα και για $\varepsilon = 0$, θα είναι

$$0 = \left. \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d(Kp)}{dt} .$$

Επομένως, η ποσότητα

$$Kp$$

διατηρείται. Αν είχαμε πολλές συντεταγμένες, βάζοντας δείκτες, με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στη διατήρηση της:

$$K_i p_i .$$

A.2 Ο μετασχηματισμός $X(\varepsilon) = x + \varepsilon$, $Y(\varepsilon) = y - \varepsilon$, $Z(\varepsilon) = z + \varepsilon$, είναι συμμετρία, συνεπώς διατηρείται η

$$p_x + p_z - p_y = 2\dot{x} + 2\dot{z} - 2\dot{y} .$$

A.3 Αν θέσω $\alpha = x + y$, $\beta = y + z$ τότε οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$2\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} , 2\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial \beta} , 2\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\partial V}{\partial \beta} ,$$

Προσθέτοντας τις πρώτες δύο και αφαιρώντας την τελευταία έχω ότι:

$$2\ddot{x} + 2\ddot{z} - 2\ddot{y} = 0$$

συνεπώς η ποσότητα

$$2\dot{x} + 2\dot{z} - 2\dot{y}$$

διατηρείται.