



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξετάσεις στη Μηχανική II 26 Ιουνίου 2009

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Ένα σωματίδιο, μάζας m , μπορεί να κινείται ελεύθερα σε ένα μονοδιάστατο κόσμο (επί του άξονα x).

- (α) Γράψτε τη δράση που αντιστοιχεί σε μια οποιαδήποτε κίνηση του σωματιδίου που συνδέει δύο οποιαδήποτε χωρο-χρονικά σημεία
- (β) Ελαχιστοποιώντας την παραπάνω δράση, δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι ομαλή (σταθερή ταχύτητα). [Υπ: Χωρίστε την κίνηση σε μια ομαλή κίνηση που να συνδέει τα δύο χωρο-χρονικά άκρα και μια αυθαίρετη παρέκκλιση από αυτή και δείξτε ότι η δράση καθίσταται ελάχιστη όταν η παρέκκλιση είναι μηδενική.]
- (γ) Ποια είναι η ελάχιστη αυτή τιμή της δράσης δεδομένης της χωρικής Δx και χρονικής απόστασης Δt των δύο ακραίων σημείων της τροχιάς;
- (δ) Θεωρήστε τώρα ότι το σωματίδιο ξεκινά από το σημείο $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ και επανέρχεται στο ίδιο σημείο $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = T$. Το σωματίδιο πάλι κινείται ελεύθερα αλλά περιορίζεται να κινείται μόνο στα αριστερά ($x \leq x_a(t)$) ενός κινούμενου άκρου το οποίο κινείται ομαλά επί του άξονα x σύμφωνα με την εξίσωση $x_a(t) = L_0 - Vt$ στο χρονικό διάστημα T . Υποθέστε ότι το σωματίδιο συναντά μία φορά το κινούμενο άκρο, τη χρονική στιγμή t_1 . Γράψτε τη δράση για τη συνολική κίνηση του σωματιδίου ως συνάρτηση του t_1 θεωρώντας ότι πριν και μετά την κρούση με το τοίχωμα η δράση δίδεται από την ελάχιστη τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Ελαχιστοποιήστε τη ως προς t_1 και βρείτε τη σχέση της ταχύτητας πριν και μετά την κρούση.
- (ε) Υποθέστε τώρα ότι συμβαίνουν N τέτοιες κρούσεις με το κινούμενο τοίχωμα στους χρόνους $t_1 < t_2 < \dots < t_N < T$ και άλλες $N - 1$ κρούσεις με ένα σταθερό αδιαπέραστο τοίχωμα στο σημείο $x = 0$ τις χρονικές στιγμές $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}$ με $t_i < \tau_i < t_{i+1}$. Γράψτε τη δράση γι' αυτού του είδους την κίνηση και ελαχιστοποιήστε την ως προς όλους τους χρόνους. Υπολογίστε έτσι την τελική ταχύτητα του σωματιδίου (μετά τη N -οστή κρούση με το κινούμενο τοίχωμα) ως συνάρτηση της αρχικής.

Θέμα Β: Επάνω σε μια οριζόντια αβαρή χορδή μήκους $4a$, που βρίσκεται τεντωμένη μεταξύ δύο τοιχωμάτων, έχουμε τοποθετήσει τρία σωματίδια σε αποστάσεις a , $2a$ και $3a$ από το ένα τοίχωμα. Τα δύο ακραία σωματίδια έχουν μάζες $3m$ ενώ το μεσαίο $4m$ και μπορούν να εκτελούν κατακόρυφες κινήσεις. Έστω x, y οι κατακόρυφες αυτές μετατοπίσεις των δύο ακραίων σωματιδίων (του αριστερού και του δεξιού) και z αυτή του μεσαίου σωματιδίου. Το όλο σύστημα βρίσκεται στο κενό και εκτός βαρυτικού πεδίου, ενώ η μοναδική δυναμική ενέργεια του συστήματος οφείλεται στην τάση της χορδής T και δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$V = \frac{1}{2}m\Omega^2 [x^2 + (x - z)^2 + (z - y)^2 + y^2]$$

όπου $\Omega^2 = T/(ma)$.

- (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση της χορδής με τα σωματίδια και κατασκευάστε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

- (β) Είναι ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας θετικός ή όχι (παρατηρήστε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας). Από την απάντησή σας συμπεράνετε αν η χορδή θα εκτελέσει ταλαντωτική κίνηση ή κάτι άλλο.
- (γ) Βρείτε τις χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος και εξηγήστε ποιο είναι το φυσικό τους νόημα. [Υπ: Εκτελέστε τις πράξεις με προσοχή. Προκύπτει ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με ρίζες απλούς ρητούς αριθμούς.]
- (δ) Κάθε μουσική οκτάβα αντιστοιχεί σε διπλασιασμό της συχνότητας. Έτσι η ίδια νότα παιγμένη σε διαφορετικές οκτάβες έχει λόγο συχνοτήτων $\omega_1 : \omega_2 = 2^k$ όπου k ακέραιος. Εξηγήστε αν η τυχαία αρχική παραμόρφωση της χορδής θα ταλαντωθεί έτσι ώστε να ακουστεί μόνο μια νότα ή συγχορδία διαφορετικών νοτών. [Δίδεται ότι $\sqrt{6} \simeq 2.45$.]
- (ε) Βρείτε και σχεδιάστε τους τρεις τρόπους ταλάντωσης.

Θέμα Γ: Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται στο χώρο εντός μαγνητικού πεδίου που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = B_0(0, 0, y)$. Η θέση του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $\vec{r} = (x, y, z)$ και αρχικά το σωματίδιο βρισκόταν στο σημείο $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ και είχε μηδενική ταχύτητα κατά μήκος του άξονα x ($v_x(0) = 0$).

- (α) Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από το παραπάνω ανυσματικό δυναμικό είναι ομογενές. Ποια η διεύθυνσή του;
- (β) Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και στη συνέχεια κατασκευάστε από τη Λαγκρανζιανή τη Χαμιλτονιανή του $H(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$.
- (γ) Υπολογίστε τις αγκύλες Poisson $\{z^\nu, p_z^\mu\}$, όπου ν, μ ακέραιοι αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι της μονάδας, και $\{p_z, H\}$.
- (δ) Αποδείξτε ότι οι ποσότητες

$$y_c = \frac{p_z}{qB_0}, \quad z_c = \frac{p_y - qB_0 z}{qB_0}$$

είναι σταθερές της κίνησης και η μεταξύ τους αγκύλη $\{y_c, z_c\}$ είναι **μη** μηδενική.

- (ε) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι η ακόλουθη

$$x(t) = 0, \quad y(t) = y_c + R \cos(\omega t + \phi), \quad z(t) = z_c + R \sin(\omega t + \phi)$$

ζητώντας να επαληθεύει τις εξισώσεις του Χάμιλτον. [Υπ: Διευκολύνει να μετατρέψετε τις εξισώσεις του Hamilton για το y και το z σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού προτού εισάγετε την παραπάνω λύση.] Καθορίστε έτσι τη σταθερά ω και υπολογίστε τις R, ϕ από τις αρχικές συνθήκες. Αν η ενέργεια του σωματιδίου (μόνο κινητική) λάμβανε για κάποιο (κβαντομηχανικό) λόγο διακριτές τιμές τι συνέπειες θα είχε αυτή στις δυνατές τροχιές του σωματιδίου;

Καλή σας επιτυχία

Λύσεις

Θέμα Α:

(α)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt$$

όπου $x(t)$ η κίνηση που συνδέει τα δύο χωροχρονικά άκρα.

(β) Έστω

$$x(t) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) + \xi(t).$$

Η συνάρτηση $\xi(t)$ πρέπει να ικανοποιεί τις $\xi(t_2) = \xi(t_1) = 0$ αφού το υπόλοιπο της λύσης (η ομαλή κίνηση) περνάει από τα σωστά άκρα. Κατά τα άλλα ή $\xi(t)$ είναι εντελώς αυθαίρετη. Εισάγοντας τη μορφή αυτή της κίνησης στη δράση παίρνουμε

$$S = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \dot{\xi} \right)^2 = \frac{m}{2} \left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + 2 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\xi}^2 \right].$$

Όμως ο δεύτερος όρος είναι 0 από τις συνθήκες που ικανοποιεί η $\xi(t)$ και ο τελευταίος όρος είναι θετικά ορισμένος. Επομένως η δράση ελαχιστοποιείται για $\xi(t) = \text{σταθερό} = 0$ (0 λόγω των συνοριακών της συνθηκών).

(γ)

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} = \frac{m}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

(δ)

$$S = \frac{m}{2} \left(\frac{x_a(t_1)^2}{t_1} + \frac{x_a(t_1)^2}{T - t_1} \right)$$

Παραγωγίζοντας ως προς t_1 και θέτοντας την παράγωγο ίση με 0 βρίσκουμε

$$0 = 2(-V) \left(\frac{x_a(t_1)}{t_1} + \frac{x_a(t_1)}{T - t_1} \right) - \frac{x_a(t_1)}{t_1^2} + \frac{x_a(t_1)}{(T - t_1)^2}$$

οπότε η ταχύτητα πριν την κρούση με το κινούμενο τοίχωμα u_0 με αυτήν μετά u_1 σχετίζονται ως

$$2V(u_0 + u_1) = u_1^2 - u_0^2 \Rightarrow u_1 = u_0 + 2V.$$

(ε) Η δράση τώρα για όλη την κίνηση θα είναι

$$S = \frac{m}{2} \left(\frac{x_a(t_1)^2}{t_1} + \frac{x_a(t_1)^2}{\tau_1 - t_1} + \frac{x_a(t_2)^2}{t_2 - \tau_1} + \frac{x_a(t_2)^2}{\tau_2 - t_2} + \dots + \frac{x_a(t_N)^2}{t_N - \tau_{N-1}} + \frac{x_a(t_N)^2}{T - t_N} \right)$$

Θα πρέπει $\partial S / \partial t_i = \partial S / \partial \tau_j = 0$ για όλα τα i, j . Το κάθε t_i, τ_j εμφανίζεται σε 2 όρους μόνο. Έτσι

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t_i} = -2V \left(\frac{x_a(t_i)}{t_i - \tau_{i-1}} + \frac{x_a(t_i)}{\tau_i - t_i} \right) - \left(\frac{x_a(t_i)}{t_i - \tau_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{x_a(t_i)}{\tau_i - t_i} \right)^2$$

και

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \tau_i} = - \left(\frac{x_a(t_i)}{\tau_i - t_i} \right)^2 + \left(\frac{x_a(t_{i+1})}{t_{i+1} - \tau_i} \right)^2.$$

Το δεύτερο 0 λέει ότι οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση με το σταθερό τοίχωμα είναι ίδιες ενώ το πρώτο 0 ότι κάθε κρούση με το κινούμενο αυθάνει την ταχύτητα κατά $2V$. Επομένως $u_N = u_0 + 2NV$.

Θέμα Β:

(α)

$$L = \frac{m}{2} [(3\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2 + 4\dot{z}^2) - \Omega^2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz)]$$

Έτσι (αν αγνοήσουμε τον πολλαπλασιαστικό όρο $m/2$)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \Omega^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

με συνιστώσες αντίστοιχα x, y, z .

(β) Η δυναμική ενέργεια ως άθροισμα τετραγώνων είναι πάντα θετική για οποιαδήποτε x, y, z . Προφανώς γίνεται 0 (σημείο ισορροπίας) για $x = y = z = 0$. Επομένως όλες οι ιδιοσυχνότητες θα είναι πραγματικές και το σύστημα θα εκτελεί υπέρθεση ταλαντώσεων (μείγμα κανονικών τρόπων ταλάντωσης).

(γ) Θα είναι οι λύσεις του πολυνύμου

$$\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2) = 0$$

δηλαδή

$$0 = \begin{vmatrix} 2\Omega^2 - 3\omega^2 & 0 & -\Omega^2 \\ 0 & 2\Omega^2 - 3\omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & 2\Omega^2 - 4\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \dots 0 = (2\Omega^2 - 3\omega^2) [(2\Omega^2 - 3\omega^2)(2\Omega^2 - 4\omega^2) - 2\Omega^4]$$

Επομένως η μία λύση είναι $\omega_1^2 = (2/3)\Omega^2$ και οι άλλες δύο οι λύσεις του τριωνύμου $12x^2 - 14\Omega^2 x + 2\Omega^4 = 2(6x - \Omega^2)(x - \Omega^2) = 0$ (όπου $x = \omega^2$). Συνεπώς οι άλλες δύο ιδιοσυχνότητες είναι $\omega_2^2 = \Omega^2/6$ και $\omega_3^2 = \Omega^2$. Το σύστημα για αυθαίρετες αρχικές συνθήκες ταλαντώνεται με ένα γραμμικό συνδυασμό ταλαντώσεων με τις 3 παραπάνω συχνότητες.

(δ) Θα είναι

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \sqrt{4/6} : \sqrt{1/6} : \sqrt{6/6} = 2 : 1 : \sqrt{6}$$

Επομένως θα ακουστεί μια συχνότητα παιγμένη με μια οκτάβα διαφορά και άλλη μια διαφορετική συχνότητα στην οκτάβα που αρχίζει από την ω_1 . Αν η ω_2 αντιστοιχεί στη ντο, η ω_1 είναι πάλι ντο μια οκτάβα πάνω και η ω_3 είναι λίγο πιο κάτω από τη μι (3.5 ημιτόνια πάνω) αμέσως πιο πάνω από την ω_1 .

(ε) Εισάγοντας τις 3 ιδιοσυχνότητες στον πίνακα $(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)$ υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Omega^2 \\ 0 & 0 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & 2\Omega^2/3 \end{pmatrix} X_1 = 0, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} (3/2)\Omega^2 & 0 & -\Omega^2 \\ 0 & (3/2)\Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & (4/3)\Omega^2 \end{pmatrix} X_2 = 0, \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 & 0 & -\Omega^2 \\ 0 & -\Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\Omega^2 & -2\Omega^2 \end{pmatrix} X_3 = 0. \quad (3)$$

Επομένως

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ο πρώτος τρόπος ταλάντωσης έχει τη μεσαία μάζα ακίνητη και τις άλλες να κινούνται ανάποδα (η μία πάνω η άλλη κάτω). Στο δεύτερο πάνε όλα μαζί με τη μεσαία να απομακρύνεται μιάμιση φορά περισσότερο από τις δύο ακριανές που ταλαντώνονται το ίδιο. Στον τρίτο όταν οι δύο ακραίες πάνε το ίδιο πάνω η μεσαία πάει σε ίδια απόσταση κάτω (ανάποδα).

Θέμα Γ:

(α)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & B_0 y \end{vmatrix} = \hat{x} \partial(B_0 y)/\partial y B_0 \hat{x}.$$

Πρόκειται για ομογενές πεδίο στον άξονα x .

(β)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qB_0 y \dot{z}.$$

Έχουμε

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + qB_0 y$$

οπότε αντιστρέφοντάς τες γράφουμε τη Χαμιλτονιανή

$$H = \dot{x}_i p_i - L \quad (4)$$

$$= \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z - qB_0 y}{m} p_z \frac{m}{2} \left[\left(\frac{p_x}{m} \right)^2 + \left(\frac{p_y}{m} \right)^2 + \left(\frac{p_z - qB_0 y}{m} \right)^2 \right] - qB_0 y \frac{p_z - qB_0 y}{m} \quad (5)$$

$$= \dots = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{(p_z - qB_0 y)^2}{2m} \quad (6)$$

(γ) Είναι

$$\{z^\nu, p_z^\mu\} = 0 + 0 + \frac{\partial z^\nu}{\partial z} \frac{\partial p_z^\mu}{\partial p_z} - 0 \cdot 0 = \nu \mu z^{\nu-1} p_z^{\mu-1}$$

όπου τα πρώτα 2 μηδέν αντιστοιχούν στις παραγωγίσεις ως προς $x/p_x, y/p_y$ ενώ τα τελευταία 2 μηδέν είναι οι παραγωγίσεις ως προς p_z, z αντίστοιχα. Επίσης

$$\{p_z, H\} = \{p_z, \frac{(p_z - qB_0 y)^2}{2m}\} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{(p_z - qB_0 y)^2}{2m} = 0$$

(δ) Η διατήρηση της πρώτης ποσότητας μόλις δείχτηκε αφού $\dot{p}_z = \{p_z, H\} = 0$. Για τη δεύτερη έχουμε

$$\dot{z}_c = \{z_c, H\} = \frac{1}{qB_0} \{(p_y - qB_0 z), H\} = \frac{1}{qB_0} \left((-1) \frac{\partial H}{\partial y} - qB_0 \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) = 0.$$

Επίσης είναι

$$\{y_c, z_c\} = \frac{1}{(qB_0)^2} \{p_z, (p_y - qB_0 z)\} = \frac{1}{(qB_0)^2} (\{p_z, p_y\} - qB_0 \{p_z, z\}) = \frac{1}{(qB_0)^2} (0 - qB_0(-1)) = \frac{1}{qB_0}$$

(ε) Οι εξισώσεις του Hamilton είναι

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x/m, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y/m, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = (qB_0/m)(p_z - qB_0 y) \quad (8)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = (p_z - qB_0 y)/m, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Επομένως $p_x, p_z = \text{σταθερές}$. Αν εισάγουμε την προτεινόμενη λύση στις εξισώσεις και εκμεταλλευτούμε την αποδεδειγμένη διατήρηση των y_c, z_c , η πρώτη εξίσωση αριστερά επαληθεύεται ενώ οι άλλες 2 αριστερές γίνονται με μια δεύτερη παραγωγή

$$\ddot{y} = \frac{qB_0}{m^2}(p_z - qB_0 y) \quad (10)$$

$$\ddot{z} = -\frac{qB_0}{m}\dot{y}. \quad (11)$$

και μετά την εισαγωγή της λύσης

$$-R\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 (y_c - y) = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 R \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

$$-R\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\left(\frac{qB_0}{m}\right) (-R\omega) \sin(\omega t + \phi) \quad (13)$$

Οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούνται αυτόματα αν $\omega = qB_0/m$. Επίσης

$$\dot{y}(0) = -R\omega \sin \phi, \dot{z}(0) = R\omega \cos \phi, y(0) = 0 = y_c + R \cos \phi, z(0) = 0 = z_c + R \sin \phi.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{\omega^2}(\dot{y}^2(0) + \dot{z}^2(0)) = R^2 \quad (14)$$

$$\tan \phi = -\dot{y}(0)/\dot{z}(0). \quad (15)$$

Από την πρώτη βλέπουμε ότι η κβαντισμένη ενέργεια θα οδηγούσε σε κβαντισμένη ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.