



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II 27 Ιουνίου 2008

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαίτερα. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Θεωρήστε δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2 που βρίσκονται αντίστοιχα στις θέσεις $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ και αλληλεπιδρούν με το νευτώνειο δυναμικό (αυτό της βαρύτητας) $V = -k/|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$.

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2)$ που διέπει την κίνησή τους.
2. Αντί των $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ χρησιμοποιήστε τώρα τις συντεταγμένες της σχετικής θέσης $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ και του κέντρου μάζας $\vec{X} = (m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)/(m_1 + m_2)$. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση σε αυτές τις συντεταγμένες.
3. Ποια είναι η Χαμιλτονιανή στις καινούργιες συντεταγμένες;
4. Διατηρείται κάποια από τις ορμές που αντιστοιχούν στις καινούργιες συντεταγμένες; Αποδείξτε το.

ΘΕΜΑ Β Σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 1$ είναι περασμένες 3 σημειακές χάντρες με μάζες $1, 1, \sigma$, αντίστοιχα, οι οποίες μπορούν να κινούνται επί της στεφάνης δίχως τριβές. Οι τρεις μάζες συνδέονται μεταξύ τους με τρία όμοια γραμμικά ελατήρια σκληρότητας 1 τα οποία έχουν το καθένα φυσικό μήκος όσο το $1/3$ της περιμέτρου της στεφάνης δηλαδή ίσο με $2\pi/3$. Αρχικά οι χάντρες βρίσκονται ακίνητες στις γωνιακές θέσεις $0, 2\pi/3$ και $4\pi/3$ και το σύστημα ισορροπεί. Το σύστημα τώρα διαταράσσεται και η πρώτη μάζα βρίσκεται στη θέση θ_1 , η δεύτερη στη θέση $2\pi/3 + \theta_2$ και η τρίτη στη θέση $4\pi/3 + \theta_3$ (όλες οι γωνίες λαμβάνονται με την ίδια φορά). Χρησιμοποιήστε στα ακόλουθα ερωτήματα τις θέσεις αυτές ως συντεταγμένες.

1. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος και τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας.
2. Υποθέστε την ακόλουθη κίνηση των τριών χαντρών

$$\theta_i(t) = \Omega t, \text{ για όλα τα } i.$$

Επιβεβαιώστε ότι η κίνηση αυτή αποτελεί λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange του συστήματος. Ποια η ιδιοσυχνότητα της κατάστασης αυτής;

3. Υποθέστε την ακόλουθη κίνηση των τριών χαντρών

$$\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \sin(\omega t), \quad (1)$$

$$\theta_3(t) = 0. \quad (2)$$

Επιβεβαιώστε ότι και αυτή η κίνηση αποτελεί λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange του συστήματος για μια συγκεκριμένη τιμή της ω . Προσδιορίστε την τιμή αυτή της ω . Γράψτε την ιδιοκατάσταση (δεν είναι ανάγκη να την κανονικοποιήσετε) που περιγράφεται από την κίνηση αυτή.

4. Υποθέστε την ακόλουθη κίνηση των τριών χαντρών

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \sin(\omega t), \quad (3)$$

$$\theta_3(t) = -A \sin(\omega t). \quad (4)$$

Το ω που εμφανίζεται στις παραπάνω εκφράσεις είναι άγνωστο και δεν έχει σχέση με το ω του προηγούμενου ερωτήματος. Δείξτε ότι η κίνηση αυτή μπορεί να αποτελεί λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange του συστήματος αν τα ω και A ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων:

$$\omega^2 - 1 = A, \quad A(2 - \sigma\omega^2) = -2.$$

Το σύστημα αυτό με δεδομένη την τιμή του σ έχει ως λύση δύο τιμές για το ω^2 και αντίστοιχα δύο τιμές για το A . Προσδιορίστε τις δύο αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις. Η μία ιδιοκατάσταση είναι αυτή που βρήκατε στο ερώτημα (2). Γράψτε την άλλη ιδιοκατάσταση όταν $\sigma = 1$ και την αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα. Σε αυτή τη περίπτωση όλες οι μάζες είναι ίδιες και θα περίμενε κανείς, όπως και στο ερώτημα (3), να είναι ιδιοκατάσταση και η $(0, 1, -1)^T$ με ιδιοσυχνότητα ίδια με εκείνη του ερωτήματος (3). Η ιδιοκατάσταση όμως που έχετε βρεί για $\sigma = 1$ είναι διαφορετική. Φτιάξτε ένα γραμμικό συνδυασμό των δύο ιδιοκαταστάσεων, εκείνης του ερωτήματος (3) και της καινούργιας που βρήκατε στο παρόν ερώτημα για $\sigma = 1$, ο οποίος να περιγράφει ίδιου τύπου ταλάντωση σαν εκείνη του ερωτήματος (3), δηλαδή δύο από τις μάζες να ταλαντώνονται με ανάποδη φάση και η τρίτη να είναι ακίνητη (για παράδειγμα την $(0, 1, -1)^T$).

ΘΕΜΑ Γ Σωματίδιο μάζας m και φορτίου e κινείται στο μη ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{x})$ το οποίο με τη σειρά του μπορεί να περιγραφεί μέσω του ανυσματικού δυναμικού $\vec{A}$ ως ακολούθως: $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Οι τρεις συνιστώσες των ανυσμάτων σημειώνονται αντίστοιχα με x, y, z . Με $\vec{v}$ συμβολίζουμε την ταχύτητα του σωματιδίου.

1. Γράψτε τη Λαγκραντζιανή του φορτισμένου σωματιδίου.
2. Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή που διέπει το σωματίδιο.
3. Υπολογίστε τις εξής αγκύλες Poisson:

$$\{x, p_x\}, \quad \{y, p_y\}, \quad \{z, p_z\},$$

όπου p_x, p_y, p_z οι κανονικές ορμές του συστήματος συζυγείς των θέσεων x, y, z αντίστοιχα.

4. Υπολογίστε τις εξής αγκύλες Poisson:

$$\{x, A_x\}, \quad \{x, mv_x\}, \quad \{mv_x, mv_y\}.$$

[Το προηγούμενο ερώτημα ίσως σας βοηθήσει στον υπολογισμό της 2ης αγκύλης Poisson δεδομένης της τιμής της 1ης.]

5. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης όταν το σωματίδιο κινείται στο ανυσματικό δυναμικό $A_x = -By$, $A_y = A_z = 0$ όπου B μία σταθερά (το ανυσματικό αυτό δυναμικό αντιστοιχεί σε ομογενές μαγνητικό πεδίο στη κατεύθυνση z) και προσδιορίστε την κίνηση του σωματιδίου $x(t), y(t), z(t)$ δεδομένων των αρχικών συνθηκών $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ και $v_x(0) = 1, v_y(0) = 0, v_z(0) = 0$.

ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΜΑ Α

1.

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{k}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

2. Με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{x}^2 + \frac{k}{|\vec{x}|}$$

3.

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{X}} \quad , \quad \vec{p} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{x}}$$

οπότε με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{k}{|\vec{x}|}$$

όπου $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$.

4. Διατηρούνται όλες οι συνιστώσες της $\vec{P}$ αφού δεν υπάρχουν στην L οι συνιστώσες της $\vec{X}$. Επίσης διατηρούνται οι συνιστώσες της $\vec{p}$ που αντιστοιχούν σε γωνίες αφού δεν υπάρχουν στην L οι γωνιακές συνιστώσες του $\vec{x}$. Με άλλα λόγια διατηρείται η στροφορμή.

ΘΕΜΑ Β

1.

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \sigma\dot{\theta}_3^2) - \frac{1}{2}((\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2 + (\theta_3 - \theta_1)^2)$$

με αντίστοιχους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{M}\ddot{\theta} + \mathbf{V}\theta = \mathbf{0}$$

Δοκιμάζουμε λοιπόν τη λύση που μας δίνεται και βρίσκουμε ότι επαληθεύεται αφού

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η ιδιοσυχνότητα είναι ίση με μηδέν αφού η λύση δεν είναι ταλαντωτική.

3. Για να είναι λύση θα έχουμε

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t) + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε λύνοντας βρίσκουμε $\omega^2 = 3$. Η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση είναι η

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Για να είναι λύση θα έχουμε

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sigma A \end{pmatrix} \sin(\omega t) + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -A \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε λύνοντας καταλήγουμε στο ζητούμενο σύστημα. Επιλύοντάς το έχουμε $\omega^2 = 0$, $A = -1$ ή $\omega^2 = 1 + 2/\sigma$, $A = 2/\sigma$. Η πρώτη λύση είναι ιδιοκατάσταση σαν αυτή του ερωτήματος (2). Η άλλη, για $\sigma = 1$ γίνεται $(1, 1, -2)^\top$, η οποία δεν φαίνεται να έχει καμία σχέση με την $(1, -1, 0)^\top$ ή την άλλη αναμενόμενη $(0, 1, -1)^\top$. Όμως ισχύει ότι

$$1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή ο συγκεκριμένος γραμμικός συνδυασμός είναι απλώς η αναμενόμενη ιδιοκατάσταση. Οι δυο ιδιοκαταστάσεις $(1, -1, 0)^\top$ και $(1, 1, -2)^\top$ είναι απλώς εκφυλισμένες καταστάσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα $\omega^2 = 3$.

ΘΕΜΑ Γ

1.

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + e\vec{A} \cdot \vec{v}.$$

2.

$$\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}.$$

οπότε

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L \\ &= \vec{p} \cdot \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} - \frac{1}{2}m \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right)^2 - e\vec{A} \cdot \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \\ &= \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m}. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Εξ ορισμού όλες αυτές είναι ίσες με 1.

4.

$$\{x, A_x\} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial p_x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial p_y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial p_y} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial p_z} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial p_z} = 0.$$

$$\{x, mv_x\} = \{x, p_x - eA_x\} = \{x, p_x\} - e\{x, A_x\} = 1 - 0.$$

$$\begin{aligned} \{mv_x, mv_y\} &= \{p_x - eA_x, p_y - eA_y\} \\ &= \{p_x, p_y\} + e^2\{A_x, A_y\} - e(\{p_x, A_y\} + \{A_x, p_y\}) \\ &= 0 + 0 - e\left(-1\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}1\right) = e(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z \\ &= eB_z \end{aligned} \tag{6}$$

5.

$$H = \frac{1}{2m}[(p_x + eBy)^2 + p_y^2 + p_z^2]$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = (p_x + eBy)/m \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y/m \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z/m \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -eB(p_x + eBy)/m \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{7}$$

επομένως $p_x, p_z = \text{σταθερά}$. Δηλαδή $\dot{z} = \text{σταθ} = 0$, $z(t) = 0$. Επίσης από την 1η και την 5η

$$\dot{x} + \dot{p}_y/(eB) = 0 \Rightarrow x(t) = -(p_y(t) - p_y(0))/(eB).$$

Τώρα παραγωγίζοντας την 1 έχουμε

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (eB/m)\dot{y} = (eB/m^2)p_y = (eB/m^2)(-eBx + p_y(0)) \Rightarrow \\ \ddot{x} + (eB/m)^2x &= (eB/m^2)p_y(0) = (eB/m^2)(mv_y(0) + eA_y(0)) = 0\end{aligned}\tag{8}$$

με λύση $x(t) = (m/(eB)) \sin(eBt/m)$ δεδομένων των αρχικών συνθηκών. Τώρα παραγωγίζοντας την 2 έχουμε

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \dot{p}_y/m = -(eB/m^2)(p_x + eBy) \Rightarrow \\ \ddot{y} + (eB/m)^2y &= -(eB/m^2)p_x = -(eB/m^2)(mv_x(0) + eA_x(0)) = -(eB/m)\end{aligned}\tag{9}$$

με λύση $y(t) = -\frac{m}{eB}(1 - \cos(eBt/m))$ δεδομένων των αρχικών συνθηκών. Με άλλα λόγια θα εκτελεί κυκλική κίνηση στο επίπεδο (x, y) με κέντρο το $(0, -m/eB, 0)$ και ακτίνα $R = m/eB$.