



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ II
Φεβρουάριος 2003

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 θέματα με σαφήνεια και συντομία. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

(α) Δείξτε από τις εξισώσεις του Χάμιλτον ότι κάθε δυναμική μεταβλητή $A(q, p)$ εξελίσσεται σύμφωνα με την $\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$, όπου H η Χαμιλτονιανή και $\{A, H\}$ η αγκύλη Poisson των A, H . Τι συμπεραίνετε σχετικά με τη διατήρηση μιας δυναμικής μεταβλητής;

(β) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή σωματιδίου που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο υπό την επίδραση του κεντρικού δυναμικού $U(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (χρησιμοποιήστε καρτεσιανές συντεταγμένες).

(γ) Δείξτε είτε χρησιμοποιώντας δείκτες είτε εκτελώντας τις πράξεις με μια προς μια όλες τις καρτεσιανές συντεταγμένες ότι $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_i}{r^3}$.

(δ) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα δείξτε ότι $\left\{ \frac{1}{r}, x_j \right\} = 0$ και

$$\left\{ \frac{1}{r}, p_j \right\} = -\frac{x_j}{r^3}, \text{ για κάθε συντεταγμένη } j.$$

(ε) Δείξτε ότι για κάθε Χαμιλτονιανή όπως αυτή του (β) είναι $\{\ell_i, H\} = 0$, όπου ℓ_i η i συνιστώσα της στροφορμής του σωματιδίου.

Θέμα 2 (25 ή 35 μονάδες)

(α) Ποια η Λαγκρανζιανή, L_I , ελεύθερου σωματιδίου στον τρισδιάστατο χώρο σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα;

(β) Γράψτε τις διατηρούμενες ποσότητες και αναφέρατε από ποια συμμετρία της Λαγκρανζιανής προέρχονται.

(γ) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή, L_R , του σωματιδίου σε ένα σύστημα αξόνων που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$ και έχει την ίδια αρχή με το αδρανειακό.

(δ) Υπολογίστε τη γενικευμένη ορμή $\vec{p}_R$ στο περιστρεφόμενο σύστημα καθώς και τη γενικευμένη στροφορμή $\mathbf{X}_R \times \vec{p}_R$. Ποια η σχέση τους με τη ορμή και τη στροφορμή στο μη περιστρεφόμενο σύστημα όπως αυτές εκφράζονται στο περιστρεφόμενο σύστημα; Τι συμπεραίνετε όσον αφορά στη διατήρησή τους;

(ε) (προαιρετικό για επιπλέον 10 μονάδες). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της Noether προσδιορίστε τις διατηρούμενες ποσότητες που παράγονται από τη Λαγκρανζιανή στο περιστρεφόμενο σύστημα.

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Αν θέλουμε να περάσουμε από στην απέναντι πλευρά ενός βουνού η συντομότερη διαδρομή δεν είναι αναγκαστικά αυτή που περνά από τη κορυφή του. Σκοπός του προβλήματος είναι να προσδιορίσετε γενικά τη συντομότερη διαδρομή γύρω από ένα συμμετρικό βουνό. Η θέση προσδιορίζεται με τις κυλινδροπολικές συντεταγμένες $(r, \theta, z(r))$, όπου $z(r)$ είναι το ύψος της εκάστοτε θέσης και r η απόσταση από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του βουνού που περνά από την κορυφή του. Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συντομότερη διαδρομή που συνδέει το σημείο $(r_1, 0, z(r_1))$ με το σημείο $(r_1, \pi, z(r_1))$ στην άλλη πλευρά του βουνού. Η διαδρομή προσδιορίζεται από την $r(\theta)$ με $r(0) = r_1$ και $r(\pi) = r_1$

α) Δείξτε ότι το συνολικό μήκος της διαδρομής είναι

$$s = \int_0^\pi L(r, \dot{r}) d\theta \quad \text{με} \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \quad \text{και} \quad L = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2 \left(1 + (z')^2 \right)}, \quad \text{όπου} \quad z' = \frac{dz}{dr} \quad \text{το οποίο}$$

είναι δεδομένη συνάρτηση του r για οποιοδήποτε αξονικά συμμετρικό βουνό.

γ) Δείξτε ότι επί της διαδρομής ελάχιστου μήκους η ποσότητα: $\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L$ είναι σταθερή.

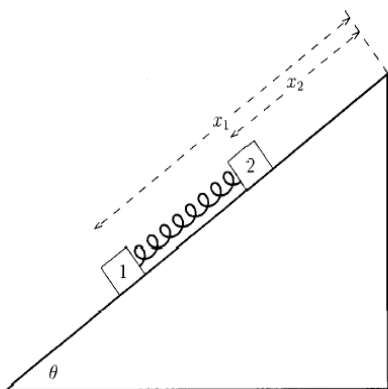
δ) Θεωρήστε το κωνικό βουνό $z = -kr$, (k σταθερό). Δείξτε χρησιμοποιώντας το (β) ή αλλιώς ότι η ελάχιστη διαδρομή είναι της μορφής:

$$r = \frac{c}{\cos[a(\theta - \theta_0)]} \quad \text{με} \quad a = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{και} \quad \text{κατάλληλες σταθερές } [c, \theta_0].$$

(ε) Περνά η συντομότερη διαδρομή από τη κορυφή;

Θέμα 4 (25 μονάδες)

Δύο μάζες m_1 και m_2 βρίσκονται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, που σχηματίζει



γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο, και είναι συνδεδεμένες με ένα ελατήριο σταθεράς K και φυσικού μήκους ℓ . Η κατακόρυφη επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Δεν υπάρχει τριβή. Οι σχετικές θέσεις των μαζών υπολογίζονται κατά μήκος του επιπέδου με αρχή την κορυφή του επιπέδου, όπως στο σχήμα.

α) Αν η μάζα m_2 κρατιέται ακίνητη στο $x_2 = 0$, βρείτε τη θέση x_1 στην οποία ισορροπεί η m_1 .

β) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση

$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ που διέπει τη κίνηση των μαζών όταν κινούνται ελεύθερα στο κεκλιμένο επίπεδο, και από αυτή γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.

γ) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση με συντεταγμένες το κέντρο μάζας και τη σχετική θέση των μαζών. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης σε αυτές τις συντεταγμένες.

δ) Χρησιμοποιώντας την (γ) (ή με άλλο τρόπο) προσδιορίστε την $x_2(t)$, αν όταν $t = 0$ η κατάσταση του συστήματος ήταν: $x_2 = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 = 0$ και $x_1 = \ell$.

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(α) Αφού $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, θα είναι

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \{A, H\}$$

(β) $H = \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$

(γ) $\frac{\partial}{\partial x_i} r^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j^2)^{-1/2} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} (-x_j) r^{-3} = -x_i / r^3$.

(δ) Η πρώτη αγκύλη είναι μηδέν γιατί δεν υπάρχει καμία εξάρτηση από ορμές

και των δύο ποσοτήτων. $\left\{1/r, p_j\right\} = \frac{\partial(1/r)}{\partial x_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial(1/r)}{\partial p_i} = -\frac{x_i}{r^3} \delta_{ij} - 0 = -\frac{x_j}{r^3}$.

(ε) $\left\{l_k, H\right\} = \frac{\partial(\varepsilon_{klm} x_l p_m)}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial(\varepsilon_{klm} x_l p_m)}{\partial p_i} = (\varepsilon_{klm} \delta_{li} p_m)(p_i / m) - (U' x_i)(\varepsilon_{ilm} x_l \delta_{mi}) = 0$,

εξαιτίας της αντισυμμετρικότητας του ε και της συμμετρικότητας των $p_m p_i, x_m x_i$. Δηλαδή η στροφορμή διατηρείται για κεντρικά πεδία.

ΘΕΜΑ 2

(α) $L_I = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

(β) Η ενέργεια (η ίδια η Λαγκρανζιανή) από τη συμμετρία μετάθεσης στο χρόνο, οι ορμές $m\dot{x}_i$ από τη συμμετρία μετάθεσης των αντίστοιχων συντεταγμένων, οι στροφορμές ως προς οποιοδήποτε σημείο $\varepsilon_{ijk} x_j p_k$ από τη συμμετρία των στροφών γύρω από κάθε άξονα, οι $m\dot{x}_i - p_i t$, από τους τρεις γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς στους 3 άξονες.

(γ) Ας υποθέσουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι κατά μήκος του z άξονα. Αν όχι χρησιμοποιούμε άλλο σύστημα αξόνων που έχει τον z άξονα κατά μήκος του $\vec{\omega}$. Τώρα οι συντεταγμένες θα αλλάξουν ως ακολούθως:

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$$

$$y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t$$

$$z' = z$$

Λύνοντας ως προς τις άτονες ποσότητες βρίσκουμε

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t$$

$$z = z'$$

$$L_R = \frac{1}{2} m \left(\left[\frac{d}{dt} (x' \cos \omega t - y' \sin \omega t) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (y' \cos \omega t + x' \sin \omega t) \right]^2 + \dot{z}'^2 \right) =$$

Έτσι

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 + \omega^2 [x'^2 + y'^2] + 2\omega [x'\dot{y}' - y'\dot{x}']).$$

(δ) Υπολογίζουμε τις γενικευμένες ορμές

$$p'_x = \frac{\partial L_R}{\partial \dot{x}'} = m(\dot{x}' - \omega y'),$$

$$p'_y = \frac{\partial L_R}{\partial \dot{y}'} = m(\dot{y}' + \omega x'),$$

$$p'_z = \frac{\partial L_R}{\partial \dot{z}'} = m\dot{z}'$$

και τη γενικευμένη στροφορμή

$$L'_x = y'p'_z - z'p'_y$$

$$L'_y = z'p'_x - x'p'_z$$

$$L'_z = x'p'_y - y'p'_x$$

Παρατηρούμε, εκτελώντας τις πράξεις ότι

$$p'_x = p_x \cos \omega t + p_y \sin \omega t,$$

$$p'_y = -p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t$$

$$p'_z = p_z$$

δηλαδή πρόκειται για την ορμή στο αδρανειακό σύστημα όπως αυτή μετριέται στο περιστρεφόμενο σύστημα, η οποία διατηρείται (πρόκειται για σταθερό άνυσμα στο αδρανειακό σύστημα).

Για τη δε στροφορμή θα έχουμε

$$L'_x = (-x \sin \omega t + y \cos \omega t)p_z - z(-p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t) = \sin \omega t L_y + \cos \omega t L_x$$

$$L'_y = z(p_x \cos \omega t + p_y \sin \omega t)p_z - (x \cos \omega t + y \sin \omega t)p_z = \cos \omega t L_y - \sin \omega t L_x$$

$$L'_z = (x \cos \omega t + y \sin \omega t)(-p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t) -$$

$$(-x \sin \omega t + y \cos \omega t)(p_x \cos \omega t + p_y \sin \omega t) = L_z$$

είναι ακριβώς η αντίστοιχη συνιστώσα της στροφορμής στο αδρανειακό σύστημα, η οποία διατηρείται, όπως αυτή μετριέται όμως στο περιστρεφόμενο σύστημα.

(ε) Εκτός από την προφανή διατήρηση της ορμής κατά τον z άξονα που προέρχεται από συμμετρία της περιστρεφόμενης Λαγκρανζιανής σε με2ταθέσεις κατά τον z, υπάρχει και η συμμετρία σε στροφές του επιπέδου x-y.

Πράγματι αν εκτελέσω μια απειροστή στροφή

$$x' \rightarrow x' + \epsilon y',$$

$$y' \rightarrow y' - \epsilon x'$$

η Λαγκρανζιανή βλέπουμε ότι δεν αλλάζει σε πρώτη τάξη ως προς ϵ , επομένως διατηρείται η στροφορμή κατά τον z-άξονα, πράγμα το οποίο γνωρίζαμε από το ερώτημα (δ). Επίσης η ενέργεια διατηρείται αφού η Λαγκρανζιανή δεν έχει χρονική εξάρτηση.

ΘΕΜΑ 3

(α) Η μορφολογία του βουνού θεωρείται δεδομένη μέσω της συνάρτησης $\mathbf{z}(\mathbf{r})$.

Η απόσταση δύο σημείων σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες είναι

$$ds^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + dz^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + (z' dr)^2 = (1 + z'^2)dr^2 + (r d\theta)^2.$$

Έτσι το συνολικό μήκος μιας οποιασδήποτε διαδρομής επάνω στο βουνό μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα

$$s = \int ds = \int \sqrt{(1+z'^2)dr^2 + (rd\theta)^2} =$$

$$\int d\theta \sqrt{(1+z'^2)(dr/d\theta)^2 + r^2} =$$

$$\int d\theta \sqrt{(1+z'^2)\dot{r}^2 + r^2}$$

όπου ο παράγοντας $\dot{r}$ είναι μια συνάρτηση του r .

(β) Η ποσότητα που θέλουμε να δείξουμε πως είναι σταθερή είναι το αντίστοιχο του ολοκληρώματος Jacobi για τη Λαγκρανζιανή. Εκτελώντας την παραγωγή αμέσως έχουμε

$$\frac{d}{d\theta} \left(\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L \right) = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{r} \frac{\partial L}{\partial r} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \ddot{r} + \frac{\partial L}{\partial r} \dot{r} \right) = 0.$$

Ο μεν δεύτερος όρος του δεξιού μέλους γράφηκε έτσι χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange $\frac{d}{d\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$, που καθιστά στάσιμο το συναρτησοειδές του μήκους. Ο δε τελευταίος όρος (μέσα στην παρένθεση) είναι παραγωγή αλυσίδας της L .

(γ) Η σταθερότητα της ποσότητας (β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευαστεί η

δ.ε. της ζητούμενης διαδρομής.

$$\dot{r} \frac{\dot{r}(1+k^2)}{\sqrt{\quad}} - \sqrt{\quad} = -c$$

και με λίγες πράξεις ...

$$\frac{c\sqrt{1+k^2}dr}{r\sqrt{r^2-c^2}} = d\theta.$$

Επιβεβαιώνουμε με απλή παραγωγή ότι η δεδομένη συνάρτηση ικανοποιεί αυτή τη δ.ε.2

(δ) Επειδή το συνημίτονο είναι φραγμένο το r δεν μπορεί ποτέ να γίνει μηδέν εκτός αν το

$c=0$ καμιά διαδρομή που δεν ξεκινά ούτε καταλήγει στην κορυφή δεν περνά από την κορυφή.

ΘΕΜΑ 4

(α) Το σύστημα είναι τότε ενός βαθμού ελευθερίας.

$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} K(x_1 - l)^2 + m_1 g x_1 \sin \theta$ με εξίσωση κίνησης

$$m_1 \ddot{x}_1 + K(x_1 - l) - m_1 g \sin \theta = 0.$$

Το σημείο ισορροπίας θα δίνεται από

$$\ddot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = l + m_1 g \sin \theta / K.$$

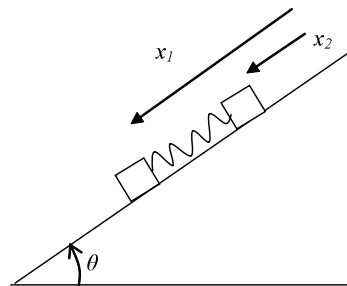
(β) $L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} K(x_1 - x_2 - l)^2 + (m_1 g x_1 + m_2 g x_2) \sin \theta.$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m_1 \ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2 - l) - m_1 g \sin \theta = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - K(x_1 - x_2 - l) - m_2 g \sin \theta = 0$$

(γ) $L = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + MgX \sin \theta + \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K(x - l)^2.$



Στις συντεταγμένες αυτές το πρόβλημα χωρίζεται σε δύο απλά ανεξάρτητα προβλήματα με λύσεις

$$x = l + a \sin\left(\sqrt{\frac{K}{\mu}}t + \phi\right)$$

$$X = X_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$$

Με τις δοσμένες αρχικές ταχύτητες είναι,
 $a = 0$

$$\phi = 0 \text{ ? ποτε}$$

$$X_0 = l \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$V_0 = 0$$

$$\text{οπότε } x_2(t) = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2 .$$

.