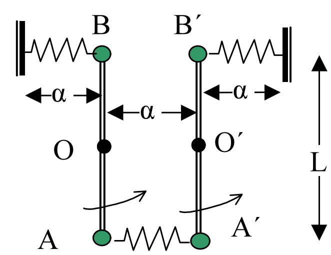
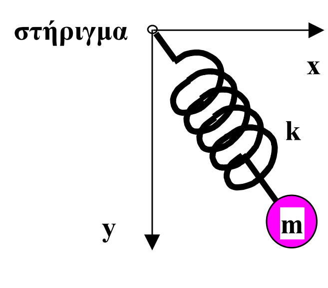
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999
στο μάθημα της ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΙΙ

1. Δύο σωματίδια με μάζες m_1, m_2 αντίστοιχα, τα οποία μπορούν να κινούνται πάνω σε ένα επίπεδο αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυναμικό V νευτώνειου τύπου (οι δυνάμεις, δηλαδή, που δημιουργούνται υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα). Επιλέγοντας ως γενικευμένες συντεταγμένες για την περιγραφή του συστήματος των δύο σωματιδίων τις 2 καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας των και τις πολικές συντεταγμένες (r,θ) του διανύσματος που συνδέει τα δύο σωματίδια, (α) γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος. (β) Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος και γράψτε τις κανονικές εξισώσεις κίνησης. (γ) Ποιες είναι οι σταθερές της κίνησης; (δ) Δείξτε ότι το πρόβλημα της κίνησης των δύο σωματίων ανάγεται τελικά στην επίλυση μίας μόνο διαφορικής εξίσωσης με μοναδική μεταβλητή την απόσταση των δύο σωματιδίων.
2. Αν H είναι η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου που κινείται σε μια διάσταση, δείξτε ότι η θέση του κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να υπολογιστεί από το ανάπτυγμα:
$$x(t) = x(0) + \frac{t}{1!}[x,H]_{t=0} + \frac{t^2}{2!}[[x,H],H]_{t=0} + \frac{t^3}{3!}[[[x,H],H],H]_{t=0} + \cdots$$
όπου $[f,g]_{t=0}$ αναπαριστά την αγκύλη Poisson των συναρτήσεων f,g υπολογισμένη τη χρονική στιγμή $t=0$. Βρείτε την εξίσωση κίνησης ενός ελευθέρου σωματιδίου στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανάπτυγμα. (Θεωρήστε την κατακόρυφη μόνο κίνηση.)
3. Δύο όμοιες αβαρείς ράβδοι μήκους L μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα γύρω από το κέντρο τους Ο, Ο΄. Στα τέσσερα άκρα τους Α, Α΄, Β, Β΄ φέρουν από μια σημειακή μάζα m. Οι μάζες συνδέονται με ελατήρια σταθεράς k και φυσικού μήκους ίσου με την απόσταση α των αξόνων των δύο ράβδων όπως στο σχήμα (το κάτω ελατήριο συνδέει τις δύο κάτω μάζες ενώ τα άνω ελατήρια συνδέουν τις άνω μάζες με ακλόνητα τοιχώματα). Στην κατάσταση ισορροπίας οι ράβδοι είναι παράλληλοι. Οι ράβδοι κινούνται στο ίδιο επίπεδο και βρίσκονται *εκτός* του βαρυτικού πεδίου της Γης. (α) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοσυναρτήσεις των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος. (β) Περιγράψτε την εξέλιξη του συστήματος αν αρχικά η αριστερή ράβδος είναι ακίνητη και η δεξιά περιστρέφεται σύμφωνα με τη φορά των βελών με γωνιακή ταχύτητα $\omega << \sqrt{k/m}$.



4. Ένα εκκρεμές αποτελείται από μια σημειακή μάζα m στερεωμένη στο ένα άκρο ελατηρίου μηδενικού φυσικού μήκους και σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου συνδέεται σε ακλόνητο στήριγμα. (α) Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος για κινήσεις της μάζας επί κατακορύφου επιπέδου στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες. (β) Με κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων μετατρέψτε τη Λαγκρανζιανή σε Λαγκρανζιανή ισότροπου αρμονικού σε δύο διαστάσεις. (γ) Βρείτε τον συνεχή μετασχηματισμό που αποτελεί συμμετρία της καινούριας αυτής Λαγκρανζιανής. (δ) Ποια η διατηρούμενη ποσότητα ως συνέπεια της παραπάνω συμμετρίας;



Καλή επιτυχία

Απαντήσεις

1. (α) $L = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$

   (β) $H = \frac{P_x{}^2 + P_y{}^2}{2M} + \frac{p_r{}^2}{2\mu} + \frac{p_\theta{}^2}{2\mu r^2} + V(r)$

   $\dot{X} = \frac{P_x}{M}, \dot{Y} = \frac{P_y}{M}, \dot{P}_x = 0, \dot{P}_y = 0$

   $\dot{r} = \frac{p_r}{\mu}, \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{2\mu r^2}, \dot{p}_r = -\frac{dV}{dr} + \frac{p_\theta{}^2}{\mu r^3}, \dot{p}_\theta = 0$

   (γ) P_x, P_y, p_θ σταθερά

   (δ) από τη (β) $\Rightarrow \mu\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{p_\theta{}^2}{\mu r^3}$

2. Εφόσον αναπτύσσοντας κατά Taylor $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)\frac{t}{1!} + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots$ και ισχύει από τις ιδιότητες των αγκύλων Poisson ότι $[x, H] = \dot{x}, [\dot{x}, H] = \ddot{x}, \ldots$, η σχέση είναι προφανής.

   Για την ελεύθερη πτώση ισχύει ότι $[x, H] = \frac{p}{m}, [[x, H], H] = -g, [\cdots[[x, H], H], \ldots] = 0$, οπότε $x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t - \frac{g}{2}t^2$.

3. (α) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}, \Psi_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \Psi_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, όπου ο πρώτος τρόπος ταλάντωσης αφορά την παράλληλη στροφική ταλάντωση των ράβδων και ο δεύτερος την κατοπτρικά συμμετρική ταλάντωση των ράβδων.

   (β) $$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\omega}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) - \frac{\omega}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) &= \frac{\omega}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{\omega}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t) \end{aligned},$$

   όπου θετικές νοούνται οι σύμφωνες με τη φορά των βελών.

4. (α) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$

   (β) $\psi = y - \frac{mg}{k}, L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\psi}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + \psi^2) + \frac{m^2 g^2}{2k}$

   (γ) $$\begin{aligned} x &\to x + \varepsilon\psi \\ \psi &\to \psi - \varepsilon x \end{aligned}$$

   (δ) διατηρούμενη ποσότητα η $m(\psi\dot{x} - x\dot{\psi}) = -L_z - \frac{mg}{k}p_x$