



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II Φθινόπωρο 2012

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Όλα τα ερωτήματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α

1. Δισδιάστατος ταλαντωτής έχει δράση:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{\omega^2}{2} x^2 - \frac{\omega^2}{2} y^2 \right\} dt .$$

Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από αυτή τη δράση δεδομένου ότι ικανοποιείται η αρχή του Χάμιλτον. Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις αυτές για να δείξετε ότι η ποσότητα

$$J = \dot{x}y - y\dot{x}$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Γράψτε τη γενική λύση των εξισώσεων συναρτήσει των $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ και υπολογίστε το J που αντιστοιχεί σε μία τέτοια γενική κίνηση.

2. Ένας άλλος ταλαντωτής έχει τη δράση:

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{\alpha}{4} x^4 - \frac{\beta}{2} x^2 y^2 - \frac{\alpha}{4} y^4 \right\} dt ,$$

με α, β πραγματικές σταθερές. Προσδιορίστε τις νέες εξισώσεις κίνησης και από αυτές δείξτε ότι τώρα δεν διατηρείται κατ'ανάγκη η ποσότητα $J = \dot{x}y - y\dot{x}$. Προσδιορίστε για ποιες τιμές του λόγου α/β η ποσότητα J διατηρείται. Τι ιδιαίτερο συμβαίνει σε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις;

3. Ειδικά για τιμή του α/β για την οποία η ποσότητα J διατηρείται, γράψτε τη δράση \tilde{S} και την ποσότητα J στις πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Ποία η ερμηνεία της J ; Γράψτε τις αντίστοιχες εξισώσεις στις πολικές συντεταγμένες και δείξτε ότι η κίνηση μπορεί να περιγραφεί μέσω της κίνησης σωματιδίου σε κάποιο ενεργό δυναμικό:

$$\ddot{r} = -\frac{dV_e}{dr} .$$

Προσδιορίστε το ενεργό δυναμικό $V_e(r)$, σχεδιάστε το για $\alpha > 0$ και $J \neq 0$. Δείξτε ότι σε αυτή τη περίπτωση ο ταλαντωτής μπορεί να εκτελεί κυκλική κίνηση. Τι κίνηση εκτελεί το σωματίο για $\alpha > 0$ και $J = 0$;

ΘΕΜΑ Β Μονοδιάστατο Χαμιλτονιανό σύστημα προσδιορίζεται από τη θέση x και την ορμή p .

1. Ορίστε την αγγύλη Poisson $\{f, g\}$ δύο συναρτήσεων $f(x, p, t)$ και $g(x, p, t)$.
2. Προσδιορίστε τις αγγύλες $\{x, x\}$, $\{p, p\}$, $\{x, p\}$.
3. Αν ισχύουν οι εξισώσεις του Χάμιλτον με Χαμιλτονιανή H , τότε δείξτε ότι ισχύει:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}.$$

4. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου μάζας m και δείξτε ότι η H διατηρείται κατά την κίνηση.
5. Δείξτε ότι για το ελεύθερο σωματίδιο η $F = x - pt/m$ αλλά και η $\partial F/\partial t$ διατηρούνται. Ποία η φυσική ερμηνεία αυτών των ποσοτήτων;
6. Δείξτε τώρα ότι σε κάθε περίπτωση αν η $H(x, p, t)$ διατηρείται κατά την κίνηση δεν μπορεί να έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο (είναι $\partial H/\partial t = 0$), και ότι εάν επιπλέον διατηρείται και η συνάρτηση $F(x, p, t)$ τότε διατηρείται η $\{F, H\}$, παρότι η F έχει άμεση χρονική εξάρτηση. Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για την $\partial^n F/\partial t^n$ για κάθε n .

ΘΕΜΑ Γ Θεωρήστε ένα γραμμικό συμμετρικό τριατομικό μόριο που βρίσκεται στην ευθεία x και αποτελείται από ένα κεντρικό άτομο μάζας M συνδεδεμένο εκατέρωθεν με δύο άτομα μάζας m με ελκτικούς δεσμούς που επαναφέρουν τα άτομα στη θέση ισορροπίας όπως ένα ελατήριο σταθεράς k . Θεωρούμε ταλαντωτικές κινήσεις επί της ευθείας x περί τα σημεία ισορροπίας. Προσδιορίστε τις κανονικές ταλαντώσεις και κανονικές συχνότητες του μορίου αυτού συναρτήσει των $\omega_1^2 = k/M$ και $\omega_2^2 = k/m$. Εξηγήστε την προέλευση μηδενικών συχνοτήτων. Αν αρχικά τα άτομα ήταν ακίνητα στη θέση ισορροπίας εκτός από το πρώτο αριστερά το οποίο είχε ταχύτητα 1, προσδιορίστε τη θέση του συμμετρικού του κάθε χρονική στιγμή (για ευκολία πράξεων λάβετε $\omega_2^2 = 3/2$ και $\omega_1^2 = 1$).