ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική ΙΙ

20 Σεπτεμβρίου 2010

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α Η Λαγκραντζιανή σωματιδίου που κινείται σε ένα μαγνητικό πεδίο είναι:

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A}\ ,$$

όπου $\vec{A}(\vec{x})$ το ανυσματικό δυναμικό που μπορεί να εξαρτάται από τη θέση $\vec{x}$ και $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

1. Προσδιορίστε την ενέργεια του σωματιδίου E και δείξτε ότι αυτή διατηρείται.

2. Αν το σωματίδιο κινείται στο δυναμικό που ορίζεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, ϕ, z) ως

   $$\vec{A} = \frac{1}{(1+z^2)}(0, r, 0)\ ,$$

   προσδιορίστε άλλη μία σταθερά της κίνησης. [Υποδ.: προσέξτε ότι η L δεν έχει καμία εξάρτηση από τη μεταβλητή ϕ.]

3. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και δείξτε ότι το σωματίδιο θα εκτελέσει κυκλική κίνηση αν αρχικά βληθεί απο το σημείο $(r_0, \phi_0, 0)$ με ταχύτητα $-(2q/m)(0, r_0, 0)$. Ποια θα είναι τότε η συχνότητα με την οποία θα διαγράφει το σωματίδιο την κυκλική κίνηση;

4. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχεί στο ανυσματικό αυτό δυναμικό. [Υποδ.: Αρχικά εκφράστε το $\vec{A}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες αφού πρώτα το αναλύσετε στη βάση των μοναδιαίων $\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}$.]

Θέμα Β Η κινητική και δυναμική ενέργεια φυσικού συστήματος στις συντεταγμένες q_i με $i = 1, \ldots, n$ είναι αντίστοιχα (με αθροιστική σύμβαση):

$$T = \frac{1}{2}T_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\ \ ,\ \ V = \frac{1}{2}V_{ij}q_iq_j\ ,$$

όπου T_{ij}, V_{ij} σταθεροί συμμετρικοί πίνακες.

1. Γράψτε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange.

Θεωρήστε τώρα το φυσικό σύστημα με

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\dot{q}_i^2\ \ ,\ \ V = \frac{1}{2}(q_1^2 + (q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + q_3^2)\ .$$

2 Δείξτε ότι υπάρχουν τρεις συχνότητες με τις οποίες όλες οι συντεταγμένες του συστηματος μπορούν να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα (χωρίς να τις υπολογίσετε).

3 Δείξτε οτι οι συχνότητες αυτές δεν εξαρτώνται απο το πλάτος ταλάντωσης των συντεταγμένων.

4 Προσδιορίστε τώρα αυτές τις συχνότητες και εξηγήστε πώς θα μπορούσατε να τις εντοπίσετε πειραματικά.

5 Αποδείξτε ότι οι συντεταγμένες όταν ταλαντώνονται με τους τρόπους αυτούς η διαφορά φάσης μεταξύ αυτών είναι ή 0 ή π.

Θέμα Γ Φυσικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας διέπεται απο τη Χαμιλτονιανή $H(q,p)$.

1. Ορίστε την αγκύλη Poisson $\{f,g\}$ ως προς τις κανονικές μεταβλητές q,p των συναρτήσεων $f(q,p,t)$ και $g(q,p.t)$.
2. Δείξτε κάνοντας χρήση των εξισώσεων του Χάμιλτον ότι

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \ .$$

Θεωρήστε τώρα έναν αρμονικό ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

και ορίστε τις μεταβλητές:

$$a = \frac{p - i\omega q}{\sqrt{2\omega}} \ \ , \ \ a^* = \frac{p + i\omega q}{\sqrt{2\omega}}$$

όπου $i = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα.

3 Υπολογίστε τις αγκύλες Poisson $\{a,a\}$, $\{a,a^*\}$, $\{a,H\}$ και $\{a^*,H\}$.

4 Δείξτε ότι αν η μεταβλητή $f(q,p,t)$ εκφραστεί ως συνάρτηση των a,a^* (αντί των q,p) και του t ότι:

$$\frac{df}{dt} = i\omega\left(a^*\frac{\partial f}{\partial a^*} - a\frac{\partial f}{\partial a}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \ .$$

5 Βάσει της προηγούμενης σχέσης, δείξτε ότι οι δύο ποσότητες $(\ln a^*) - i\omega t$ και $(\ln a) + i\omega t$ είναι σταθερές της κίνησης. Πώς εξελίσσονται λοιπόν οι ποσότητες a και a^* με το χρόνο κατά τη κίνηση του ταλαντωτή;

Λύσεις

Θέμα Α:

1. Εφόσον το σύστημα δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση διατηρείται η ενέργεια που ορίζεται ως:

$$E = v_i p_i - L$$

και η κανονική ορμή είναι: $p_i = \partial L/\partial v_i = mv_i + qA_i$. Συνεπώς η ενέργεια είναι:

$$E = v_i(mv_i + qA_i) - mv_iv_i/2 - qv_iA_i = m\frac{|\vec{v}|^2}{2} \ ,$$

η κινητική ενέργεια του σωματιδίου (πράγματι διότι το μαγνητικό πεδίο δεν κάνει έργο).

2. Η Λαγκραντζιανή σε αυτή τη περίπτωση είναι:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qr^2\dot{\phi}}{1+z^2}$$

Επειδή η L δεν εξαρτάται από το ϕ θα είναι $\partial L/\partial\phi = 0$ και συνεπώς η ϕ κανονική ορμή:

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} + \frac{qr^2}{1+z^2}$$

θα διατηρείται όπως φαίνεται αμέσως από τις εξισώσεις της κίνησης.

3. Η ακτινική εξίσωση είναι

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 + \frac{2qr\dot{\phi}}{1+z^2}$$

και η εξίσωση στον άξονα z

$$m\ddot{z} = -\frac{2qr^2\dot{\phi}z}{(1+z^2)^2} \ ,$$

από την οποία φαίνεται ότι αν αρχικά $z = 0$ και $\dot{z} = 0$ το σωματίδιο θα παραμείνει στο επίπεδο $z = 0$ πάντοτε. Για να κινείται σε κυκλική τροχιά στο επίπεδο $z = 0$ θα πρέπει να είναι $mr_0\dot{\phi}^2 + 2qr_0\dot{\phi} = 0$ οπότε και θα κινείται με συχνότητα $\dot{\phi} = -2q/m$. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει το σωματίδιο που είναι στο r_0 και στο επίπεδο $z = 0$ να έχει και μηδενική ακτινική ταχύτητα $\dot{r} = 0$ η δε αζιμουθιακή ταχύτητα του να είναι: $v_\phi = -2q/(mr_0)$.

4. Με απλή γεωμετρία βλέπει κανεις αμέσως ότι:

$$A_x = A_r\cos\phi - A_\phi\sin\phi \ \ , \ \ A_y = A_r\sin\phi + A_\phi\cos\phi \ \ , \ \ A_z = A_z \ .$$

Οπότε το μαγνητικό πεδίο έχει τις εξής καρτεσιανές συνιστώσες:

$$B_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \ ,$$

δηλαδή

$$B_x = -2\frac{xz}{(1+z^2)^2} \ \ , \ \ B_y = 2\frac{yz}{(1+z^2)^2} \ \ , \ \ B_z = \frac{2}{(1+z^2)} \ .$$

Παρατηρούμε οτι στο επίπεδο $z = 0$ το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό με διεύνση κάθετη στο επίπεδο, οπότε το σωματίδιο μπορεί να εκτελεί κυκλικές κινήσεις σε αυτό το επίπεδο.

Θέμα Β: 1. Οι πίνακες T_{ij} και V_{ij} μπορούν να ληφθούν συμμετρικοί οπότε οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$T_{ij}\ddot{q}_j = -V_{ij}q_j \ \ i = 1, \cdots, n$$

Οι εξισώσεις κίνησης στη περίπτωση αυτή είναι

$$\ddot{q}_1 = -2q_1 + q_2 \ , \ \ddot{q}_2 = q_1 - 2q_2 + q_3 \ , \ \ddot{q}_3 = q_2 - 2q_3$$

2. Αν ταλαντώνονται με συχνότητα Ω τότε κάθε συντεταγμένη θα εξελίσσεται ως: $q_i = A_i \exp(i\Omega t)$ όπου οι μιγαδικοί αριθμοί $A_i = |A_i| \exp(i\phi_i)$ είναι σταθερές (με ϕ_i τη φάση της ταλάντωσης κάθε συντεταγμένης). Εισάγοντας αυτή τη χρονική εξάρτηση στις εξισώσεις κίνησης έχουμε ότι απαιτείται να ικανοπιείται

$$\begin{pmatrix} 2-\Omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\Omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

για μη μηδενικα A_i. Τα A_i είναι μη μηδενικά μόνον όταν ο πίνακας που τα πολλαπλασιάζει δεν είναι αντιστρέψιμος και τα Ω είναι αυτά που καθιστούν την ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\Omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\Omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\Omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Η συνθήκη αυτή ορίζει μία τροτοβάθμια εξίσωση ως προς Ω^2 που έχει τρείς ρίζες, άρα τρείς είναι οι συχνότητες που μπορεί να ταλαντώνεται το σύστημα (και όχι 6 διοτι οι $\pm\Omega$ δίνει την ίδια ταλάντωση)

3. Οι συχνότητες αυτές δεν εξαρτώνται απο το πλάτος διότι στη συνθήκη ευρεσης των δεν εμπεριέχεται το πλάτος (αυτό είναι απόρροια της γραμμικότητας των ταλαντώσεων).

4. Η χαρακτηριστική εξίσωσηε είναι:

$$(2-\Omega^2)((2-\Omega)^2 - 2) = 0$$

συνεπώς οι τρεις συχνότητες είναι: $\Omega = \pm\sqrt{2}$, $\Omega = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$ και $\Omega = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Πειραματικά μπορουν να προσδιορισθούν με ανάλυση της απόκρισης του συστήματος από παλμογράφο (η φασματογράφο) ο οπίος θα εκτελέσει μετασχηματισμό Fourier της απόκρισης και θα διακριθούν οτι υπάρχουν μόνον τρεις συχνότητες (Άλλως είναι οι συχνότητες που συντονίζεται το σύσημα).

5. Οι Ω^2 είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε και τα πλάτη A_i που προκύπτουν από επίλυση των πραγματικών εξισώσεων (**??**) είναι και αυτά πραγματικά. Άρα η φάση ϕ_i είναι 0 ή π.

Θέμα Γ:

3. Αμέσως έχουμε $\{a, a\} = 0$ και $\{a, a^*\} = -i$. Τώρα:

$$\begin{aligned} \{a, H\} &= \frac{1}{2\sqrt{2\omega}}\{p - i\omega q, p^2 + \omega^2 q^2\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\omega}}\left(\omega^2\{p, q^2\} - i\omega\{q, p^2\}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(-\omega^2 q - i\omega p\right) \\ &= \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}}(p - i\omega q) \\ &= -i\omega a \ . \end{aligned}$$

Ομοίως: $\{a^*, H\} = i\omega a^*$.

4. Αν θεωρήσουμε την $f(a, a^*, t)$ τότε θα είναι

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial a^*}\frac{da^*}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

αλλά

$$\frac{da}{dt} = \{a, H\} = -i\omega a \ , \ \frac{da^*}{dt} = \{a, H\} = i\omega a^*$$

και συνεπώς προκύπτει:

$$\frac{df}{dt} = i\omega\left(-a\frac{\partial f}{\partial a} + a^*\frac{\partial f}{\partial a^*}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Αμέσως απο τη σχέση $\dot{a} = -i\omega a$ και $\dot{a}^* = i\omega a^*$ προκύπτει οτι $(\ln a) + i\omega a$ και $(\ln a^*) - i\omega a^*$ (ή παραγωγίζοντάς τα) διατηρούνται. Το a είναι ένα σταθερό διάνυσμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού ενώ το a^* με την αντίθετη φορά.