ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

15 Σεπτεμβρίου 2017

Προσπαθήστε να απαντήστε και στα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α

1. Υποθέστε ότι η Λαγκρανζιανή ενός μονοδιάστατου σωματιδίου μοναδιαίας μάζας έχει τη μορφή
$$L = V(u)T(t)\Xi(x).$$
Βρείτε την εξίσωση κίνησης και φέρτε την στη μορφή $\dot{u} = \ldots$ ώστε να θυμίζει το 2ο νόμο του Νεύτωνα.
2. Αν θέλετε η παραπάνω Λαγκρανζιανή να περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση μόνο μιας δύναμης αντίστασης ανάλογης με το τετράγωνο της ταχύτητας ($F \propto -\beta u^2$), δείξτε ότι η επιλογή $V = u^\kappa$ είναι κατάλληλη (αρκεί $\kappa \neq 0$ και 1) και $T =$σταθ. Βρείτε τότε κατάλληλη συνάρτηση $\Xi(x)$.
3. Αν θέλετε η παραπάνω Λαγκρανζιανή να περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση μόνο μιας δύναμης αντίστασης ανάλογης της ταχύτητας ($F \propto -\beta u$), δείξτε ότι και πάλι η επιλογή $V = u^\kappa$ είναι κατάλληλη αρκεί ($\kappa \neq 0$ και 1) και $\Xi =$σταθ. Βρείτε τότε κατάλληλη συνάρτηση $T(t)$.
4. Δείξτε ότι μια Λαγκρανζιανή της μορφής $L = u\Xi(x)$ δεν μπορεί να περιγράφει ένα φυσικό σύστημα καθότι έχει το ίδιο φυσικό περιεχόμενο με μια Λαγκρανζιανή άνευ φυσικού περιεχομένου: $L = 0$.
5. Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή που βρήκατε στο ερώτημα (3) έχει γενικευμένη ορμή η οποία διατηρείται. Από τη διατήρηση αυτή κατασκευάστε την εξίσωση κίνησης.

Πρόβλημα Β Μια χάντρα, μάζας m, γλυστρά δίχως τριβές πάνω σε ένα ευθύγραμμο σύρμα της μορφής $z = ax$ ($a =$ σταθ > 0) μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης έντασης $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$.

1. Αφού κατασκευάσετε τη Λαγκρανζιανή της χάντρας, υπολογίστε πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να πέσει το σωματίδιο από τη θέση ($x_0 = 1, z_0 = a$), όπου βρισκόταν αρχικά ακίνητο, στο σημείο $(0,0)$. Ακολουθήστε αν θέλετε τα εξής βήματα: (α) κατασκευάστε το ολοκλήρωμα του Jacobi και εξηγήστε γιατί είναι σταθερό, (β) υπολογίστε την τιμή αυτού, (γ) λύστε την πρωτοβάθμια εξίσωση που προκύπτει για να βρείτε το συνολικό χρόνο.
2. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή της παραπάνω χάντρας, αν το σύρμα περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, έτσι ώστε να διαγράφει μια κωνική επιφάνεια $z = a\rho$ (σε κυλινδρικές συντεταγμένες).
3. Υπολογίστε την τιμή της ω, ώστε αν αρχικά η χάντρα βρίσκεται στη θέση ($\rho_0 = 1, z_0 = a$) και δεν κινείται πάνω στο σύρμα (περιστρέφεται όμως μαζί με αυτό), θα παραμείνει για πάντα ακίνητη σε σχέση με το σύρμα. Ελέγξτε αν αυτή η ισορροπία είναι ευσταθής ή όχι θεωρώντας μικρές μετατοπίσεις της χάντρας από τη θέση αυτή.

Πρόβλημα Γ

1. Έστω η Χαμιλτονιανή μονοδιάστατου σωματιδίου $H(x,p)$. Πώς θα κατασκευάσετε τη Λαγκρανζιανή αυτού του σωματιδίου; Δείξτε ότι οι εξισώσεις Χάμιλτον συνεπάγονται τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Ποία είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι δυνατή η μετάβαση από τη Χαμιλτονιανή στη Λαγκρανζιανή συνάρτηση; Κατασκευάστε τέλος τη Λαγκρανζιανή σωματιδίου που διέπεται από τη Χαμιλτονιανή $H(x,p) = \sqrt{1+p^2}$, ελέγχοντας κατά την κατασκευή κατά πόσο οι συνθήκες κατασκευής ικανοποιούνται.

2. Η κατάσταση δύο σωματιδίων που βρίσκονται σε μονοδιάστατο χώρο προσδιορίζεται από τις κανονικές συντεταγμένες (x_1,p_1) και (x_2,p_2). Θεωρήστε τον κανονικό μετασχηματισμό που παράγεται με γεννήτορα το p_1 (ο τελεστής του μετασχηματισμού είναι: $\mathcal{D}_{p_1} = \{p_1, \ldots\}$). Πώς μετασχηματίζονται οι κανονικές συντεταγμένες x_1, p_1, x_2, p_2 υπό τον μετασχηματισμό αυτόν; Πώς μετασχηματίζεται η συνάρτηση $H(x_1,p_1,x_2,p_2)$ σε αυτό τον μετασχηματισμό; Πώς μετασχηματίζεται η Χαμιλτονιανή που έχει τη συναρτησιακή μορφή $H(x_1-x_2,p_1,p_2)$ στον κανονικό μετασχηματισμό με γεννήτορα p_1+p_2; Αποδείξτε στη συνέχεια ότι σε σωματίδια που διέπονται από Χαμιλτονιανή της μορφής $H(x_1-x_2,p_1,p_2)$, διατηρείται η συνολική ορμή p_1+p_2.

Πρόβλημα Δ Τρία σωματίδια μάζας m κινούνται επί κύκλου ακτίνας a με δυναμικό αλληλεπίδρασης:

$$V = \frac{ma^2\omega^2}{2}\left((\theta_1-\theta_2)^2 + (2\pi+\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) ,$$

όπου οι γωνίες $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq 2\pi$ προσδιορίζουν τη γωνιακή θέση των σωματιδίων επί του κύκλου. Προσδιορίστε μία κατάσταση ισορροπίας των σωματιδίων (δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη) και στη συνέχεια τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τους αντίστοιχους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης, όταν τα σωματίδια βρεθούν εκτός ισορροπίας.

Λύσεις

Πρόβλημα Α 1. Η ορμή είναι

$$p = \frac{\partial L}{\partial u} = V'\,T\,\Xi$$

η γενικευμενη δύναμη

$$F = \frac{\partial L}{\partial x} = V\,T\,\Xi'$$

και η Euler-Lagrange $\dot{p} = F$:

$$V''T\Xi\dot{u} + V'T'\Xi + V'T\Xi'u = VT\Xi'$$

ή πιο κοντα στη μορφή ν. Νεύτωνα:

$$\dot{u} = \frac{V}{V''}\frac{\Xi'}{\Xi} - \frac{V'}{V''}\frac{T'}{T} - \frac{V'}{V''}\frac{\Xi'}{\Xi}u \tag{1}$$

2. Αν $V = u^k$ και $T =$σταθερό τότε η (1) γίνεται:

$$\dot{u} = -\frac{1}{k}\frac{\Xi'}{\Xi}u^2$$

και αν θέσω

$$\Xi(x) = \alpha e^{k\beta x}\ ,$$

βρίσκω ότι οι Λαγκραντζιανές

$$L = e^{k\beta x}\dot{x}^k$$

παράγουν για κάθε τιμή του k που διαφέρει από 0 και 1 την εξίσωση κίνησης

$$\dot{u} = -\beta u^2\ .$$

(Ακριβέστερα η εξίσωση με τετραγωνική τριβή είναι $\dot{u} = -\beta u|u|$. Πως επηρρεάζει αυτό την επιλογή της Λαγκραντζιανής;)

3. Αν $V = u^k$, $\Xi =$ σταθ. τότε η (1) γίνεται:

$$\dot{u} = -\frac{1}{k-1}\frac{T'}{T}u$$

συνεπώς η

$$L = u^k e^{(k-1)\beta t}$$

για κάθε τιμή του k που διαφέρει από 0 και 1 παράγει την εξίσωση κίνησης

$$\dot{u} = -\beta u\ .$$

4. Η $L = u\Xi(x)$ είναι τετριμμένη Λαγκραντζιανή, δηλαδή ισοδύναμη με $L = 0$, διότι είναι μετασχηματισμό
βαθμονόμισης διότι είναι

$$u\Xi(x) = \frac{dF(x)}{dt} \quad , \quad F(x) = \int_0^x \Xi(x')dx'$$

5. Εφόσον η Λαγκραντζιανή

$$L = u^k e^{(k-1)\beta t}$$

δεν εξαρτάται από το x, είναι αναλλοίωτη στις χωρικές μεταθέσεις, και θα διατηρείται η συζυγής σε αυτήν ορμή δηλαδή διατηρείται η

$$p = \frac{\partial L}{\partial u} = k u^{k-1} e^{\beta(k-1)t} \ ,$$

δηλαδή είναι

$$\dot{p} = 0 \ ,$$

που σημαίνει αντικαθιστώντας ότι

$$\dot{u} = -\beta u \ ,$$

δηλαδή προκύπτε συνεπώς η εξίσωση κίνησης.

Πρόβλημα Β 1. Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgz = \frac{m}{2}(1+\alpha^2)\dot{x}^2 - mg\alpha x \ ,$$

και επειδή είναι ανεξάρτητη του χρόνου διατηρείται το ολοκλήρωμα του Jacobi:

$$E = p\dot{x} - L = \frac{m}{2}(1+\alpha^2)\dot{x}^2 + mg\alpha x \ ,$$

που λαμβάνει τη τιμή $E = mg\alpha$, και συνεπώς η ταχύτητα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2g\alpha}{1+\alpha^2}(1-x)} \ .$$

Ο χρόνος για να βρεθεί στην αρχή (με $\alpha > 0$, άλλως δεν φτάνει υπο αυτές τισ συνθήκες στην αρχή) ικανοποιεί την

$$\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 = \sqrt{\frac{2g\alpha}{1+\alpha^2}}T$$

που δίνει:

$$T = \sqrt{\frac{2(1+\alpha^2)}{g\alpha}} \ .$$

2,3. Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2) - mgz = \frac{m}{2}(1+\alpha^2)\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\omega^2\rho^2 - mg\alpha\rho \ ,$$

και προκύπτει η εξίσωση κίνησης:

$$(1+\alpha^2)\ddot{\rho} = \omega^2\rho - g\alpha \ .$$

Για να ισορροπεί στο $\rho = 1$ πρέπει:

$$\omega^2 = g\alpha \ .$$

Το σημείο ισορροπίας υπάρχει εφόσον $\alpha > 0$.

Αν διαταράξουμε τη χάντρα απο το σημείο αυτό, θέτοντας $\rho = 1 + \xi$, όμως με $\omega^2 = g\alpha$, η εξίσωση για τη διαταραχή από το σημείο ισορροπίας, ξ, είναι

$$\ddot{\xi} = g\alpha\xi \ ,$$

η οποία έχει εκθετικές λύσεις. Η γενική λύση είναι:

$$\xi = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t}$$

με

$$\lambda = \sqrt{g\alpha} \ ,$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, δεδομένου ότι θα απομακρυνθεί η χάντρα από το σημείο ισορροπίας εκτός από αρχικές συνθήκες μέτρου μηδέν, δηλαδή με αρχικές συνθήκες με τις οποίες διεγείρεται μόνο ο εκθετικά φθίνον κλάδος της εξίσωσης που έχει μηδενική πιθανότητα (γιατι αυτό; ποιές αρχικές συνθήκες διεγείρουν μόνο την εκθετικά φθίνουσα λύση;) Προσέξτε εδώ το αποτέλεσμα της "διαταρακτικής" ανάλυσης είναι ακριβές διότι οι πλήρεις εξισώσεις είναι και αυτές γραμμικές. Αν το σύρμα δεν ήταν ευθεία τότε οι εξισώσεις δεν θα ήταν γραμμικές και η ισορροπία της χάντρας εμφανίζει νέα φαινόμενα, μπορεί να αλλάξει από ευσταθής σε ασταθή όπως αλλάζει το σημείο ισορροπίας.

Πρόβλημα Γ

1. Από τις εξισώσεις του Χάμιλτον έχω ότι:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \ . \tag{2}$$

Αυτή η σχέση ορίζει επίσης το $\dot{q}$ ως συνάρτηση των q, p, δηλαδή

$$\dot{q} = F(q, p). \tag{3}$$

Αν μπορώ να εκφράσω το p ως συνάρτηση του $\dot{q}$ και του q, δηλαδή αν μπορώ χρησιμοποιώντας την (3) να ορίσω τη συνάρτηση

$$p = G(q, \dot{q}) \ , \tag{4}$$

τότε μπορώ να ορίσω τον μετασχηματισμό Legendre της Χαμιλτονιανής ως προς p

$$L(q, \dot{q}) = p\dot{q} - H(p, q) \ ,$$

στην οποία θεωρώ ότι $p = G(q, \dot{q})$, ο οποίος αντιστρέφει την (2) δίνοντας:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ . \tag{5}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right|_q &= \left.\frac{\partial p}{\partial \dot{q}}\right|_q \dot{q} + p - \left.\frac{\partial H(p,q)}{\partial \dot{q}}\right|_q \\
&= p + \frac{\partial p}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \left.\frac{\partial H(p,q)}{\partial p}\right|_q \left.\frac{\partial p}{\partial \dot{q}}\right|_q \quad \text{, και μέσω της (2)} \\
&= p + \frac{\partial p}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \dot{q}\left.\frac{\partial p}{\partial \dot{q}}\right|_q \\
&= p \ .
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις του Χαμιλτον (2) και

$$\dot{p} = - \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_p \tag{6}$$

συνεπάγονται τις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_p$$

διότι αφενός κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Legendre της εξίσωσης Χάμιλτον (2) προκύπτει η (5) οπότε η (6) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = - \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_p \tag{7}$$

και τέλος είναι

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial L}{\partial q}\right|_{\dot{q}} &= \left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{\dot{q}} \dot{q} - \left.\frac{\partial H(p,q)}{\partial q}\right|_{\dot{q}} \\
&= \left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{\dot{q}} \dot{q} - \left.\frac{\partial H(p,q)}{\partial p}\right|_{\dot{q}} \left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{\dot{q}} - \left.\frac{\partial H(p,q)}{\partial q}\right|_p \quad \text{, και μέσω της (2)} \\
&= \left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{\dot{q}} \dot{q} - \dot{q} \left.\frac{\partial p}{\partial q}\right|_{\dot{q}} - \left.\frac{\partial H(p,q)}{\partial q}\right|_p \quad , \\
&= - \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_p \ .
\end{aligned}$$

Οπότε η (7) γίνεται η εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Απεδείχθη έτσι ότι οι εξισώσεις Χάμιλτον συνεπάγονται τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

Όλη η κατασκευή βασίζεται στην ικανότητα να μπορεί να ορίσουμε τη συνάρτηση (4) από την (3). Αυτό μπορεί να γίνει αν η $\dot{q}$ είναι μονότονη συνάρτηση του p, που σημαίνει ότι η συνάρτηση F στην (4) έχει παράγωγο ως προς p που είναι πάντα θετική ή αρνητική, δηλαδή για να κατασκευάσουμε την Λαγκραντζιανή συνάρτηση πρέπει

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} > 0 \text{ ή } < 0 \ \text{ για κάθε } p \ .$$

Στην περίπτωση $H = \sqrt{1+p^2}$ η (3) είναι

$$\dot{q} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

που είναι μια μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση p από το $(-\infty, \infty) \to (-1, 1)$, με $\dot{q} \to -1$ όταν $p \to -\infty$ και $\dot{q} \to 1$ όταν $p \to \infty$, με αντίστροφο συνάρτηση (4) την

$$p = \frac{\dot{q}}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} \ , \ |\dot{q}| < 1 \ .$$

Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$\begin{aligned} L &= p\dot{q} - \sqrt{1+p^2} \\ &= \frac{\dot{q}^2}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\dot{q}^2}} \ , \\ &= -\sqrt{1-\dot{q}^2} \ , \ |\dot{q}| < 1. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η Λαγκραντζιανή σχετικιστικού ελεύθερου σωματιδίου. Παρατηρήστε ότι το σωματίδιο δεν μπορεί να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από 1 (ταχύτητα φωτός) είναι απόρροια της κατασκευής της Λαγκραντζιανής από τη Χαμιλτονιανή.

2. Ο κανονικός μετασχηματισμός με παράμετρο ε και γεννήτορα p_1 μετασχηματίζει τα $x_1 \to x_1(\varepsilon)$, $p_1 \to p_1(\varepsilon)$, κ.λ.π. με τον εξής τρόπο:

$$\frac{dx_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \{x_1, p_1\} = 1 \ , \quad \frac{dp_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \{p_1, p_1\} = 0 \ ,$$
$$\frac{dx_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \{x_2, p_1\} = 0 \ , \quad \frac{dp_2(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \{p_2, p_1\} = 0 \ .$$

οπότε ο μετασχηματισμός με γεννήτορα p_1 μεταθέτει μόνο τη x_1:

$$x_1(\varepsilon) = x_1 + \varepsilon \ \ , p_1(\varepsilon) = p_1, \ \ , \ \ x_2(\varepsilon) = x_2 \ \ , \ \ p_2(\varepsilon) = p_2 \ .$$

Ομοίως ο μετασχηματισμός με γεννήτορα p_2 μεταθέτει μόνο τη x_2:

$$x_1(\varepsilon) = x_1 \ \ , p_1(\varepsilon) = p_1, \ \ , \ \ x_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon \ \ , \ \ p_2(\varepsilon) = p_2 \ .$$

[Λάβαμε εδώ το πιο συμβατικό ορισμό του $\mathcal{D}_{p_1} = \{\cdot, p_1\}$ αντί του $\mathcal{D}_{p_1} = \{p_1, \cdot\}$ της εκφώνησης, για να συμφωνούν τα αποτελέσματα με τα συμβατικά πρόσημα, τα αποτελέσματα είναι ίδια με τον τελεστή που αναφέρετε στην εκφώνηση με αλλαγή του προσήμου του ε)]

Η συνάρτηση $H(x_1, p_1, x_2, p_2)$ στον μετασχηματισμό με γεννήτορα p_1 και παράμετρο ε μετασχηματίζεται στην $H(x_1 + \varepsilon, p_1, x_2, p_2)$.

Πράγματι κάθε συνάρτηση F μετασχηματίζεται σύμφωνα με:

$$\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \{F, p_1\} \ .$$

Λαμβάνοντας διαδοχικά

$$F = H, \ \ F = \frac{dH}{d\varepsilon} \ \ , F = \frac{d^2H}{d\varepsilon^2} \ \cdots$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{dH(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \{H, p_1\} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{d^2H(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} &= \{\frac{dH}{d\varepsilon}, p_1\} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} \\ \frac{d^3H(\varepsilon)}{d\varepsilon^3} &= \frac{\partial^3 H}{\partial x_1^3} \\ \cdots \end{aligned}$$

Οπότε επειδή

$$
\begin{aligned}
H(\varepsilon) &= H(x_1,p_1,x_2,p_2) + \varepsilon \left.\frac{dH}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left.\frac{d^2H}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} + \cdots \\
&= H(x_1,p_1,x_2,p_2) + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + \cdots \\
&= H(x_1+\varepsilon, p_1, x_2, p_2)
\end{aligned}
$$

Ο μετασχηματισμός $p_1 + p_2$ μετασχηματίζει τη συνάρτηση H με τον εξής τρόπο:

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = \{H, p_1 + p_2\} = \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \, .$$

Η συνάρτηση όμως $H(x_1 - x_2, p_1, p_2)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

ή

$$\{H, p_1 + p_2\} = 0$$

που σημαίνει ότι η $H(x_1 - x_2, p_1, p_2)$ παραμένει αναλλοίωτη στον κανονικό μετασχηματισμό με γεννήτορα $p_1 + p_2$. Περαιτέρω με εναλλαγή στην αγκύλη των H και $p_1 + p_2$ έχουμε επίσης

$$\{p_1 + p_2, H\} = -\{H, p_1 + p_2\} = 0$$

που σημαίνει, επειδή η Χαμιλτονιανή είναι ο γεννήτορας των χρονικών μεταθέσεων, ότι

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = \{p_1 + p_2, H\} = 0 \, .$$

Αρα διατηρείται η συνολική ορμή (ορμή του ΚΜ).

Πρόβλημα Δ 1. Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{1}{2}(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2) - \frac{\omega^2}{2}((\theta_1 - \theta_2)^2 + (2\pi + \theta_1 - \theta_3)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2) \, .$$

Οι εξισώσεις κίνησης:

$$
\begin{aligned}
\ddot\theta_1 &= -\omega^2(\theta_1 - \theta_2 + 2\pi + \theta_1 - \theta_3) = -\omega^2(2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + 2\pi) \\
\ddot\theta_2 &= -\omega^2(-\theta_1 + \theta_2 + \theta_2 - \theta_3) = -\omega^2(-\theta_1 + 2\theta_2 - \theta_3) \\
\ddot\theta_3 &= -\omega^2(-\theta_2 + \theta_3 - 2\pi - \theta_1 + \theta_3) = -\omega^2(-\theta_1 - \theta_2 + 2\theta_3 - 2\pi)
\end{aligned}
$$

και τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν

$$
\begin{aligned}
2\theta_{1e} - \theta_{2e} - \theta_{3e} &= -2\pi \\
\theta_{1e} - 2\theta_{2e} + \theta_{3e} &= 0 \\
\theta_{1e} + \theta_{2e} - 2\theta_{3e} &= -2\pi
\end{aligned}
$$

Μπορούμε χεγ (χωρίς έλλειψη γενικότητας) να λάβουμε $\theta_{1e} = 0$, δεδομένου οτι η αρχή μέτρησης των γωνιών είναι αυθαίρετη που απατυπώνεται με την ύπαρξη γραμμικής εξάρτησης των εξισώσεων του παραπάνω συστήματος. Τότε $\theta_{3e} = 2\theta_{2e}$ και $\theta_{2e} - 4\theta_{2e} = -3\theta_{2e} = -2\pi$ οπότε τα σημεία ισορροπίας είναι

$$\theta_{1e} = 0 \ \ , \theta_{2e} = \frac{2\pi}{3} \ \ , \theta_{3e} = \frac{4\pi}{3} \ .$$

Αν τώρα μετράμε κάθε γωνία σχετικά με τη θέση ισορροπίας της τότε οι εξισώσεις κίνησης γίνονται με αλλαγή κλίμακας χρόνου $\tau = \omega t$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= -2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \\
\ddot{\theta}_2 &= \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 \\
\ddot{\theta}_3 &= \theta_1\theta_2 - 2\theta_3 \ .
\end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές συχνότητες $\lambda = \Omega^2$ και τρόποι ταλάντωσης προσδιορίζονται από ιδιοανάλυση του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

οι ιδιοτιμές ικανοποιούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

που δίνει ιδιοσυχνότητες με διπλό εκφυλισμό:

$$\Omega_1^2 = 0 \ \ , \Omega_{2,3}^2 = 3\omega^2 \ .$$

Στην $\Omega_1^2 = 0$ ο τρόπος ταλάντωσης που αντιστοιχεί είναι $(1/\sqrt{3})[1, 1, 1]$, ενώ οι τρόποι ταλάντωσης που αντιστοιχούν στην εκφυλισμένη συχνότητα $\Omega_{2,3}^2 = 3\omega^2$ ικανοποιούν με οποιονδήποτε τρόπο τη συνθήκη $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$, που σημαίνει ότι κάθε ταλάντωση που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη (και καλύπτει ενα δισδιάστατο χώρο) είναι ιδιοκατάσταση. Προσέξτε ότι ο δισδιαστατος χώρος των τρόπων ταλάντωσης που αντιστοιχούν στην εκφυλισμένη ιδιοσυχνότητα είναι κάθετος στον τρόπο ταλάντωσης που αντιστοιχεί στη μηδενική συχνότητα. Δηλαδή οι ταλαντώσεις με σχετικά πλάτη $(1/\sqrt{2})[0, 1, -1]$ ή με πλάτη $(1/\sqrt{2})[1, 0, -1]$ είναι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης με συχνότητα $\Omega = \sqrt{3}\omega$, καθώς και κάθε γραμμικός συνδυασμός αυτών $\alpha[0, 1, -1] + \beta[1, 0, -1]$ είναι και αυτός κανονικός τρόπος ταλάντωσης με συχνότητα πάλι $\Omega = \sqrt{3}\omega$.