



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II Περίοδου Σεπτεμβρίου 26 Σεπτεμβρίου 2008

Απαντήστε στα προβλήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις ερωτημάτων. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται σε δύο διαστάσεις είναι

$$H = e^{-2\gamma t} \left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} \right] + e^{2\gamma t} \left[\frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} \right]$$

1. Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Στη συνέχεια λύστε τις δύο από αυτές ως προς p_x και p_y και αντικαταστήστε τις στις άλλες δύο που περιέχουν τις $\dot{p}_x, \dot{p}_y$. Κατασκευάστε έτσι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις x και y . Τι φυσικό σύστημα περιγράφουν οι εξισώσεις αυτές;
2. Κάντε το ίδιο με τα προηγούμενα ερωτήματα έτσι ώστε να απαλείψετε τα x, y και να κατασκευάσετε διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις p_x και p_y .
3. Γράψτε τις γενικές λύσεις των δύο παραπάνω ερωτημάτων για την περίπτωση που $\gamma < \omega = \sqrt{k/m}$.
4. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{xp_y - yp_x, H\}$ και δείξτε ότι η ποσότητα $xp_y - yp_x$, αυτό που θα αποκαλούσατε κλασική στροφορμή, διατηρείται.
5. Θα το περιμένατε να διατηρείται αυτή; [Σκεφθείτε ποια είναι η τελική κατάληξη του σωματιδίου.] Από τις εξισώσεις του Χάμιλτον ελέγξτε αν οι ορμές είναι οι νευτώνειες ορμές $m\dot{x}$ και $m\dot{y}$. Μήπως τώρα μπορείτε να εξηγήσετε γιατί διατηρείται η παραπάνω ποσότητα;

Θέμα Β: Ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας m κινείται επί μιας κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R . Στο σωματίδιο δεν ασκείται **καμία** δύναμη.

1. Το σωματίδιο ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο του κυλίνδρου και επιστρέφει στο ίδιο σημείο μετά από χρόνο T . Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και το ολοκλήρωμα της δράσης του σωματιδίου (προτού αυτή στασιοποιηθεί).
2. Υποθέστε ότι το σωματίδιο κινείται πάνω στη διαδρομή του θεσεογραφικού χώρου

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t + \xi(t) \quad , \quad z(t) = z_0 + \eta(t)$$

όπου ϕ_0, z_0 καθορίζουν τις κυλινδρικές συντεταγμένες του αρχικού και τελικού σημείου του σωματιδίου. Υπολογίστε τις ποσότητες $\eta(0), \eta(T), \xi(0)$ καθώς και την τιμή της ω έτσι ώστε $\xi(T) = 0$. Η τιμή της ω είναι μοναδική ή υπάρχουν και πολλές τιμές που μπορεί να πάρει αυτή;

3. Με δεδομένα τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος γράψτε πάλι το ολοκλήρωμα της δράσης και δείξτε τι κίνηση συνεπάγεται η ελαχιστοποίηση αυτού.
4. Ποια η ελάχιστη τιμή της δράσης για κάθε μια από τις τιμές που μπορεί να πάρει η ω ; Περιγράψτε την κίνηση του σωματιδίου που αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα ελάχιστα.

Θέμα Γ: Ένα σύστημα N σωματιδίων, το καθένα με μάζα m_i ($i = 1, 2, \dots, N$), κινούνται πάνω σε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας a . Η γωνιακή θέση επί της στεφάνης του i -οστού σωματιδίου είναι θ_i . Το δυναμικό αλληλεπίδρασης όλων των σωματιδίων είναι

$$V = \frac{k}{2} \sum_{j=1}^N (\theta_{j+1} - \theta_j)^2 ,$$

όπου η k είναι μια θετική σταθερά και $\theta_{N+1} = \theta_1$ εξ' ορισμού.

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι

$$L = \frac{a^2}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\theta}_j^2 - V .$$

1. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για το i -οστό σωματίδιο και δείξτε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία όταν όλα τα σωματίδια είναι τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις το καθένα από το διπλανό του.
2. Δείξτε ότι το σύστημα έχει πάντοτε έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης με μηδενική συχνότητα. Πώς κινούνται τα σωματίδια σύμφωνα με τον τρόπο αυτό ταλάντωσης;
3. Βρείτε όλες τις ιδιοσυχνότητες και τους αντίστοιχους τρόπους ταλάντωσης για $N = 2$ και $m_1 = kT^2/a^2$ and $m_2 = 2kT^2/a^2$, όπου η T είναι μια σταθερά.

Καλή σας επιτυχία

Λύσεις

Θέμα Α:

1.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x e^{-2\gamma t}}{m} \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y e^{-2\gamma t}}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -k x e^{2\gamma t} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -k y e^{2\gamma t}$$

Λύνοντας τις πρώτες ως προς p_x, p_y και αντικαθιστώντας τις στις δεύτερες παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}e^{2\gamma t}) = -k x e^{2\gamma t} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}e^{2\gamma t}) = -k y e^{2\gamma t}$$

και ύστερα από πράξεις υπολογισμού των παραγώγων

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = 0 \quad m\ddot{y} + 2m\gamma\dot{y} + ky = 0.$$

Πρόκειται για δύο εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

2. Αν λύναμε τις δεύτερες εξισώσεις και αντικαθιστούσαμε στις πρώτες θα παίρναμε

$$\frac{d}{dt}(-\dot{p}_x e^{-2\gamma t}/k) = p_x e^{-2\gamma t}/m \quad \frac{d}{dt}(-\dot{p}_y e^{-2\gamma t}/k) = p_y e^{-2\gamma t}/m$$

δηλαδή

$$\ddot{p}_x - 2\gamma\dot{p}_x + (k/m)p_x = 0 \quad \ddot{p}_y - 2\gamma\dot{p}_y + (k/m)p_y = 0.$$

3. Οι λύσεις είναι της μορφής

$$x = A_x e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \phi_x) \quad y = A_y e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \phi_y)$$

ενώ για τις ορμές

$$p_x = P_x e^{\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \theta_x) \quad p_y = P_y e^{\gamma t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t + \theta_y)$$

4.

$$\begin{aligned} \{xp_y - yp_x, H\} &= p_y \frac{\partial H}{\partial p_x} + y \frac{\partial H}{\partial x} + -p_x \frac{\partial H}{\partial p_y} - x \frac{\partial H}{\partial y} \\ &= p_y(p_x/m)e^{-2\gamma t} + ykxe^{2\gamma t} - p_x(p_y/m)e^{-2\gamma t} - xkye^{2\gamma t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Η ποσότητα αυτή που μοιάζει με την κλασική στροφορμή διατηρείται.

5. Όχι δεν είναι αναμενόμενο αφού το σωματίδιο θα μπορούσε αρχικά να έχει στροφορμή κινούμενο όχι ακτινικά, αλλά τελικά θα ακινητοποιηθεί λόγω τριβών στο κέντρο της ταλάντωσης, επομένως δεν θα έχει στροφορμή. Η διατήρηση οφείλεται στο ότι οι ορμές δεν είναι οι νευτώνειες ορμές mv αλλά έχουν και ένα εκθετικά αυξανόμενο όρο. Έτσι παρόλες που οι νευτώνειες ορμές σβήνουν με το χρόνο οι p_x, p_y μεγαλώνουν με το χρόνο αναιρώντας τον παράγοντα της τριβής στην ποσότητα που μοιάζει με την κλασική στροφορμή.

Θέμα Β:

1.

$$L = \frac{m}{2}(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \quad S = \frac{m}{2} \int_0^T (R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) dt$$

2. Αφού $\phi(0) = \phi_0$, $\xi(0) = 0$ και αφού $z(0) = z(T) = z_0$, $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Τέλος αφού $\phi(T) = \phi_0 + 2k\pi$, $\omega T + \xi(T) = 2k\pi$ δηλαδή για $\xi(T) = 0$, $\omega = 2k\pi/T$ με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3.

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{2} \int_0^T (R^2(\omega + \dot{\xi})^2 + \dot{\eta}^2) dt \\ &= \frac{m}{2} \left[R^2\omega^2 T + \int_0^T (2R^2\dot{\xi} + R^2\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) dt \right] \\ &= \frac{mR^2\omega^2 T}{2} + 0 + \frac{m}{2} \int_0^T (R^2\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) dt \end{aligned} \quad (1)$$

Όμως το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι θετικά ορισμένο οπότε η δράση γίνεται ελάχιστη για $\xi(t) = \eta(t) = \text{σταθ} = 0$

4.

$$S_k = \frac{mR^2(2k\pi/T)^2 T}{2} = \frac{2\pi^2 k^2 m R^2}{T}$$

Η φυσική κίνηση για καθεμία από αυτές τις τιμές του k είναι ομαλή κίνηση με την εκάστοτε συχνότητα στον κύκλο $z = z_0$ επί της επιφάνειας του κυλίνδρου.

Θέμα Β:

1.

$$\begin{aligned} 0 &= m_i a^2 \ddot{\theta}_i + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} \\ &= m_i a^2 \ddot{\theta}_i - k(\theta_{i+1} - \theta_i) + k(\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= m_i a^2 \ddot{\theta}_i - k(\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) \end{aligned}$$

Όταν όλα τα σωματίδια ισαπέχουν γωνιακά η τελευταία παρένθεση είναι 0 οπότε και όλες οι επιταχύνσεις είναι μηδέν. Συνεπώς αν όλα τα σωματίδια βρεθούν σε αυτές τις θέσεις ακίνητα θα παραμείνουν για πάντα εκεί.

2. Μηδενική συχνότητα σημαίνει ότι οι ταχύτητες είναι σταθερές, δηλαδή οι επιταχύνσεις μηδενικές. Επομένως αν όλα κινούνται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε πάντα να ισαπέχουν οποιαδήποτε γειτονικά σωματίδια αυτός είναι και ο εν λόγω τρόπος ταλάντωσης με μηδενική συχνότητα.

3. Στην περίπτωση αυτή

$$\mathbf{M} = a^2(kT^2/a^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Αναζητώντας τις ιδιοσυχνότητες $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ βρίσκουμε

$$2(\omega T)^4 - 6(\omega T)^2 = 0$$

δηλαδή $\omega = 0$ $\omega = \sqrt{3}/T$. Η πρώτη περίπτωση είναι αυτή που είδαμε προηγουμένως όπου κινούνται με την ίδια ταχύτητα

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega t \\ \pi + \Omega t \end{pmatrix}$$

ενώ η δεύτερη περίπτωση είναι να κινούνται αντίρροπα

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A \cos(\sqrt{3}t/T + \phi) \\ \pi - A \cos(\sqrt{3}t/T + \phi) \end{pmatrix}$$

Η λύση αυτή προκύπτει από το ιδιοάνυσμα $(2 \ -1)$ του $\mathbf{K} - 3\mathbf{M}$.