ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική ΙΙ
Περιόδου Σεπτεμβρίου
15 Οκτωβρίου 2007

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις ερωτημάτων. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Έστω ένα σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση της δύναμης $F(x) = F = \text{σταθ.}$

1. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή του σωματιδίου $H(x, p_x)$ και τις εξισώσεις κίνησης αυτού.

2. Τώρα αλλάξτε συντεταγμένες ως ακολούθως

$$Q = p_x \ , \ \ P = -x$$

   Είναι ο μετασχηματισμός αυτός συντεταγμένων κανονικός;

3. Κατασκευάστε την καινούργια Χαμιλτονιανή $K(Q, P)$ που προκύπτει από την παλιά εξαιτίας της αλλαγής των συντεταγμένων, και γράψτε τις εξισώσεις Χάμιλτον για τη νέα Χαμιλτονιανή.

4. Κατασκευάστε τη νέα Λαγκρανζιανή $L^{(K)}$ από τη Χαμιλτονιανή K και δείξτε ότι η διαφορά της από την αρχική Λαγκρανζιανή (στις αρχικές συντεταγμένες) δεν είναι τίποτε άλλο από μια τέλεια χρονική παράγωγο μιας συνάρτησης των x, t. [Υπόδ: Θα χρειαστεί τη διαφορά αυτή να την ξαναγράψτε στις αρχικές συντεταγμένες ως συνάρτηση των $x, \dot{x}$, και να επικαλεστείτε και την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου.]

Θέμα Β: Δύο ίδιοι μονοδιάστατοι αρμονικοί ταλαντωτές συνδέονται μεταξύ τους κατά μήκος του άξονα της κίνησής τους με ένα πολύ χαλαρό ελατήριο (σε σχέση με τα ελατήρια των ταλαντωτών). Δίδονται οι μάζες m και οι σταθερές k των δύο ταλαντωτών καθώς και η σταθερά του χαλαρού ελατηρίου σύζευξης $\lambda = \epsilon k$, όπου ϵ ένας πολύ μικρός αριθμός. Αφού υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοκαταστάσεις του συστήματος βρείτε σε πόσο χρόνο ο πρώτος ταλαντωτής θα σταματήσει την ταλάντωσή του, αν ξεκινήσουν ο πρώτος με κάποια αρχική ταχύτητα και ο δεύτερος ακίνητος, από το σημείο ισορροπίας τους. Εξαρτάται ο χρόνος αυτός από την αρχική ταχύτητα του πρώτου ταλαντωτή;

Θέμα Γ: Η Λαγκρανζιανή φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου e το οποίο κινείται εντός μαγνητικού πεδίου και βρίσκεται στη θέση $\vec{x} = (x, y, z)$ είναι

$$L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 + e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x})$$

όπου το $\vec{A}(\vec{x})$, το ανυσματικό δυναμικό, δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο και σχετίζεται με το μαγνητικό πεδίο μέσω της σχέσης:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \,.$$

1. Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange δείξτε κάνοντας με προσοχή τις διανυσματικές πράξεις ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι οι εξής:
$$m\ddot{\vec{x}} = e\dot{\vec{x}} \times \vec{B}\ .$$

2. Δείξτε τώρα ότι κατά την κίνηση διατηρείται η κινητική ενέργεια K του σωματιδίου.

3. Θεωρήστε τώρα ότι το μαγνητικό πεδίο έχει την ακόλουθη μορφή $\vec{B} = (0, 0, dF/dx)$ όπου $F(x)$ μία τυχαία συνάρτηση. Αφού επιβεβαιώστε ότι ένα κατάλληλο ανυσματικό δυναμικό είναι το $\vec{A} = (0, F(x), 0)$ εντοπίστε τις κυκλικές μεταβλητές και τις αντίστοιχες διατηρούμενες ορμές. Στη συνέχεια δείξτε ότι θα πρέπει να ισχύει η σχέση
$$\dot{x}^2 = \frac{2K}{m} - \left(\frac{c - eF(x)}{m}\right)^2 - d$$
όπου c, d σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Θέμα Δ: Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B\hat{z}$. Το σωματίδιο ξεκινάει από το σημείο $(0, 0, 0)$ τη στιγμή $t = 0$ και καταλήγει στο σημείο $(L, 0, 0)$ τη στιγμή $t = t_0$. Η Λαγκρανζιανή ενός τέτοιου σωματιδίου είναι
$$L = \frac{1}{2}m\vec{u}^2 + q\vec{A} \cdot \vec{u}$$
και το ανυσματικό δυναμικό για ένα τέτοιο πεδίο μπορεί να γραφεί στη μορφή $\vec{A} = (B/2)(-y, x, 0)$.

1. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης και επιβεβαιώστε από τις αρχικές-τελικές συνθήκες ότι το σωματίδιο κινείται επί του επιπέδου x, y

2. Ολοκληρώστε τις εξισώσεις κίνησης που αφορούν στον x και y άξονα, χρησιμοποιώντας για ευκολία την παράμετρο $\omega = qB/m$. Ποια η φυσική σημασία των σταθερών της ολοκλήρωσης δεδομένων των αρχικών-τελικών συνθηκών;

3. Τώρα προσπαθήστε να κατασκευάσετε τη δράση που αντιστοιχεί σε αυτή την τροχιά. [Υποδ.: Χρησιμοποιήστε ότι $\dot{x}dt = dx$ και $\dot{y}dt = dy$. Θα διαπιστώσετε ότι από ολόκληρο το ολοκλήρωμα της δράσης δεν απομένει τίποτε άλλο παρά ολοκληρώματα της μορφής $\int dx$ και $\int dy$ τα οποία υπολογίζονται εύκολα από τις αρχικές και τελικές συνθήκες.]

4. Η δράση έχει πλέον πάρει τη μορφή $S = mLu_x(0)/2$ η οποία όμως συμπεριλαμβάνει μια ποσότητα (την $u_x(0)$) η οποία δεν υπολογίζεται άμεσα από τις αρχικές-τελικές συνθήκες. Για τον υπολογισμό αυτής εργαστείτε ως ακολούθως: Γνωρίζετε ότι η κίνηση εντός του μαγνητικού πεδίου είναι ένα κυκλικό τόξο ακτίνας R το οποίο διαγράφεται με ομαλή κίνηση και ταχύτητα $u = \omega R$ (το ίδιο ω με προηγουμένως). Με βάση τα στοιχεία αυτά υπολογίστε το $u_x(0)$ από τα L, t_0 και την έκκεντρη γωνία $\phi = \omega t_0$ που "βλέπει" σε αυτό το τόξο.

5. Βρείτε το μέγιστο δυνατό B που είναι συμβατό με τα αρχικά-τελικά δεδομένα του προβλήματος. Πόση είναι η αντίστοιχη δράση τότε; Δείξτε επίσης ότι στο όριο που μηδενίζεται το μαγνητικό πεδίο η δράση είναι αυτή ενός ελευθέρου σωματιδίου.