ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση επί Πτυχίω στη Μηχανική ΙΙ

30 Μαρτίου 2011

Απαντήστε και στα 3 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη διαδρομή ελάχιστου μήκους επί ενός επιπέδου που συνδέει το σημείο A με συντεταγμένες $(0, 0)$ με το σημείο B με συντεταγμένες $(1, 1)$.

1. Θεωρήστε τη φυσική διαδρομή γ που συνδέει το A με το B και η οποία προσδιορίζεται παραμετρικά ως $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ με την παράμετρο α να λαμβάνει τιμές $0 \leq \alpha \leq 1$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνοριακές τιμές $x(0) = y(0) = 0$ και $x(1) = y(1) = 1$. Κατασκευάστε κατάλληλη συνάρτηση L ώστε το μήκος της διαδρομής να μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:
$$S[\gamma] = \int_0^1 L \, d\alpha$$
2. Προσδιορίστε τη διαφορική σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις $x(\alpha), y(\alpha)$ που περιγράφουν τη διαδρομή ώστε να καθίσταται το παραπάνω ολοκλήρωμα στάσιμο.
3. Δείξτε ότι η στάσιμη διαδρομή είναι αυτή που αντιστοιχεί σε σταθερές τιμές των $dx/d\alpha$ και $dy/d\alpha$.
4. Προσδιορίστε την στάσιμη διαδρομή που συνδέει τα σημεία A, B.
5. Δείξτε ότι η ιδια καμπύλη που καθιστά το μήκος της διαδρομής στάσιμο καθιστά και το ολοκλήρωμα:
$$S'[\gamma] = \int_0^1 f(L) \, d\alpha$$
στάσιμο, όπου f κάποια αυθαίρετη συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Β Θεωρήστε ένα απλό επίπεδο εκκρεμές που αποτελείται από μία μάζα m συγκεντρωμένη στο άκρο ενός νήματος αμελητέας μάζας και μήκους λ. Το εκκρεμές κινείται στο κατακόρυφο και σταθερό πεδίο της βαρύτητας που έχει ένταση g. Αφού τεθεί το εκκρεμές σε κίνηση τη χρονική στιγμή $t = 0$ το μήκος του νήματος αρχίζει να μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό:
$$\frac{d\lambda}{dt} = \alpha$$
Το σημείο ανάρτησης του νήματος παραμένει σταθερό.

1. Πόσες μεταβλητές απαιτούνται για να προσδιορίσετε την κατάσταση του εκκρεμούς; Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση.
2. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης.
3. Από τις εξισώσεις κίνησης υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας E του εκκρεμούς (το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας της μάζας του εκκρεμούς). Σε ποια περίπτωση διατηρείται η ενέργεια αυτή;

4. Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή H του προβλήματος και γράψτε (χωρίς να λύσετε) τις εξισώσεις του Χάμιλτον.

5. Είναι η Χαμιλτονιανή σταθερά της κίνησης;

ΘΕΜΑ Γ Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται σε ένα περιστρεφόμενο, με γωνιακή ταχύτητα Ω, σύστημα είναι $\vec{v}$. Το σωματίδιο κινείται στο σύστημα αυτό υπό την επίδραση του δυναμικού $V(\vec{x})$, όπου $\vec{x}$ η θέση του σωματιδίου.

1. Γράψτε την Λαγκρανζιανή του σωματιδίου αυτού με μεταβλητές τη θέση και ταχύτητά του στο περιστρεφόμενο σύστημα.

2. Υπολογίστε τη γενικευμένη ορμή του σωματιδίου.

3. Επειδή η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση απο το χρόνο διατηρείται η ενέργεια. Γράψτε την έκφραση της διατηρούμενης ενέργειας.

   Δίδονται οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου στο σύστημα αυτό (δεν χρειάζεται να τις κατασκευάσετε)
   $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} V + 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} + m\vec{\Omega} \times (\vec{x} \times \vec{\Omega})$$

4. Γράψτε τις δύο διαφορικές εξισώσεις κίνησης που διέπουν τις x και y καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σωματιδίου που περιορίζεται να κινείται στο επίπεδο (x, y) το οποίο είναι ένα περιστρεφόμενο σύστημα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$, όπου $\vec{k}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο αυτό, δεδομένου ότι το δυναμικό είναι αυτό ενός αρμονικού ταλαντωτή: $V(\vec{x}) = m\Omega^2|\vec{x}|^2/2$.

5. Θεωρήστε ότι η κίνηση είναι αυτή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης, δηλαδή
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} e^{\imath\omega t}.$$
   Υπολογίστε τα 2 ιδιοανύσματα και ιδιοσυχνότητες και εξηγήστε αν αναλύσουμε με ένα φασματογράφο τις συχνότητες απορρόφησης του παραπάνω συστήματος τι θα βλέπουμε.

ΘΕΜΑ Δ

1. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή.

2. Λύστε τις εξισώσεις του Hamilton και προσδιορίστε τις $q(t), p(t)$ ως συνάρτηση των $q(0), p(0)$.

3. Θεωρήστε τώρα τον μετασχηματισμό $q \to Q$ και $p \to P$ έτσι ώστε
   $$Q(t) = q(t + \tau)\ ,\ P(t) = p(t + \tau)$$
   όπου τ κάποια σταθερά. Ελέγξτε αν ο μετασχηματισμός αυτός είναι κανονικός.

4. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή στις νέες συντεταγμένες $H(Q, P)$.

5. Υπολογίστε τις ακόλουθες αγγύλες Poisson: $\{Q, P\}$, $\{Q, H\}$, $\{P, H\}$. Διέπονται οι νέες συντεταγμένες από τις εξισώσεις του Hamilton.