ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική ΙΙ

5 Φεβρουαρίου 2014

Απαντήστε και στα 3 Προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α

Δύο ίδιοι μονοδιάστατοι αρμονικοί ταλαντωτές συνδέονται μεταξύ τους κατά μήκος του άξονα της κίνησής τους με ένα πολύ μαλακό (σε σχέση με τα ελατήρια των ταλαντωτών) ελατήριο με μηδενικό φυσικό μήκος. Δίδονται οι μάζες m και οι σταθερές k των δύο ταλαντωτών, καθώς και η σταθερά του μαλακού ελατηρίου σύζευξης $\lambda = \epsilon k$, όπου ϵ ένας πολύ μικρός αριθμός.

(1) Να βρείτε πόσο θα μετακινηθούν οι θέσεις ισορροπίας των ταλαντωτών από την προηγούμενη θέση ισορροπίας τους (αυτή που είχαν προτού συνδεθεί το μαλακό ελατήριο). Συγκρίνετε τις μετατοπίσεις αυτές. Από τι εξαρτώνται αυτές οι μετατοπίσεις εκτός από την αδιάστατη σταθερά ϵ;

(2) Αφού υπολογίσετε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοκαταστάσεις του συστήματος, βρείτε σε πόσο χρόνο ο πρώτος ταλαντωτής θα σταματήσει την ταλάντωσή του, αν ξεκινήσουν ο πρώτος με κάποια αρχική ταχύτητα και ο δεύτερος ακίνητος, από το σημείο ισορροπίας τους και οι δύο. Εξαρτάται ο χρόνος αυτός από την αρχική ταχύτητα του πρώτου ταλαντωτή;

ΘΕΜΑ Β

Έστω ένα χρονοεξαρτημένο ανυσματικό δυναμικό της μορφής

$$\vec{A} = \hat{\phi}\mathcal{A}(\rho, z, t) \tag{1}$$

το οποίο δεν έχει εξάρτηση από τη γωνία ϕ αλλά έχει την κατεύθυνση του $\hat{\phi}$.

(1) Υπολογίστε τη μορφή του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Δίδεται η μορφή του στροβιλισμού σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\vec{\nabla} \times \vec{K} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial K_z}{\partial \phi} - \frac{\partial K_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial K_\rho}{\partial z} - \frac{\partial K_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho K_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial K_\rho}{\partial \phi}\right)$$

Χρειάζεται να σχεδιάσετε ένα τριδιάστατο σχήμα για να δείξετε τη μορφή των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(2) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός φορτισμένου σωματίδιου με μάζα m και φορτίο q που κινείται στο παραπάνω μαγνητικό πεδίο. Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες.

(3) Βρείτε ποια μεταβλητή είναι κυκλική και υπολογίστε τη γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί σε αυτή. Η ορμή αυτή διατηρείται; Εξηγήστε.

(4) Αρχικά ($t = 0$) το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$ κινούμενο με ταχύτητα $(v_x(0), v_y(0), v_z(0)) = (0, 1, 0)$. Τη στιγμή $t = 1$, το σωματίδιο διέρχεται από τη θέση $(x(1), y(1), z(1)) = (0, 2, 0)$ κινούμενο με ταχύτητα $(v_x(1), v_y(1), v_z(1)) = (-2, 0, 0)$. Αν το ανυσματικό δυναμικό στην αρχική θέση, την στιγμή $t = 0$ είχε την τιμή $\mathcal{A}(\rho(0), z(0), 0) = 0$ ποια είναι η τιμή του στην τελική θέση την στιγμή $t = 1$, $\mathcal{A}(\rho(1), z(1), 1)$.

(5) Ελέγξτε αν οι παραπάνω αρχικές και τελικές συνθήκες θα μπορούσαν να είναι συμβατές με ένα χρονοανεξάρτητο ανυσματικό δυναμικό.

ΘΕΜΑ Γ

Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου κινούμενου σε μια διάσταση έχει τη μορφή

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2\gamma t} + \omega^2 \frac{x^2}{2} e^{2\gamma t}.$$

(1) Γράψτε τις εξισώσεις Χάμιλτον και αφού παραγωγίσετε την εξίσωση που δίνει το $\dot{x}$ άλλη μια φορά, συνδυάστε τις ώστε να κατασκευάσετε μια δευτεροβάθμια εξίσωση μόνο για τη συντεταγμένη x (να μην περιέχεται η συντεταγμένη p). Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Χαμιλτονιανή αυτή;

(2) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός

$$X = p e^{-\gamma t}\ ,\ P = -x e^{\gamma t}$$

είναι κανονικός μετασχηματισμός και ξαναγράψτε τη Χαμιλτονιανή στις καινούργιες αυτές κανονικές συντεταγμένες.

(3) Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή από την αρχική Χαμιλτονιανή (αυτήν που είναι γραμμένη στις συντεταγμένες (x, p)).

(4) Κατασκευάστε τη δράση του σωματιδίου που περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή του ερωτήματος (3) για το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως $t = 1/\gamma$ στην ειδική περίπτωση που $\omega = \gamma$.

(5) Θεωρήστε ότι το σωματίδιο του προηγούμενου ερωτήματος κινείται στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα από τη θέση $x(0) = 1$ στη θέση $x(1/\gamma) = 2e^{-1}$. Για τη μελέτη του ολοκληρώματος που δίνει τη δράση αλλάξτε τη χρονική μεταβλητή ολοκλήρωσης από την t στην $\tau = \gamma t$ και στη συνέχεια αντικαταστήστε την άγνωστη συνάρτηση της θέσης $x(t)$ με την $y(\tau)e^{-\tau}$. Αλλάζοντας καταλλήλως και τα όρια της ολοκλήρωσης δείξτε ότι η δράση είναι

$$S = \frac{\gamma}{2} \int_0^1 d\tau \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + S_0 \tag{2}$$

όπου το S_0 είναι ένα νούμερο σταθερό, δεδομένων των αρχικών και τελικών θέσεων. Από τη μορφή της παραπάνω δράσης βρείτε τη κατάλληλη συνάρτηση $y(\tau)$ που ελαχιστοποιεί αυτή τη δράση, είτε μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange είτε με κάποιο άλλο επιχείρημα. Βρείτε την τελική μορφή της $x(t)$ με τις δοσμένες αρχικές-τελικές συνθήκες (χρησιμοποιώντας αντίστροφα τους προηγούμενους μετασχηματισμούς).

Καλή επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

(1) $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \epsilon L/(1+2\epsilon)$, όπου L η αρχική απόσταση που χώριζε αρχικά τα δύο σωματίδια.

(2)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + \epsilon(x_1 - x_2)^2)$$

όπου τα x_1, x_2 μετρούν μετατοπίσεις από την ισορροπία του συστήματος. Έτσι βρίσκουμε $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{(1+2\epsilon)k/m}$, ενώ τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα (όχι κανονικοποιημένα) είναι $\Xi_1 = (1 \quad 1)^\top$, $\Xi_2 = (1 \quad -1)\top$.

Η γενική λύση έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (C_1 \cos\omega_1 t + S_1 \sin\omega_1 t)\Xi_1 + (C_2 \cos\omega_1 t + S_2 \sin\omega_1 t)\Xi_2.$$

Για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες είναι $C_1 = C_2 = 0$ και $S_1 = v_0/(2\omega_1)$, $S_2 = v_0/(2\omega_2)$. Για να σταματήσει ο πρώτος θα πρέπει το πλάτος της ταλάντωσής της ταχύτητας του να γίνει 0. Όμως $v_1 = S_1\omega_1 \cos\omega_1 t + S_2\omega_2 \cos\omega_2 t = (v_0/2)(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$. Όταν τα συνημίτονα γίνουν αντίθετα για 1η φορά θα συμβεί το ζητούμενο. Δηλαδή όταν $(\omega_2 - \omega_1)T = \pi$. Όμως για μικρό ϵ, $(\omega_2 - \omega_1) = \epsilon\sqrt{k/m}$, οπότε το ζητούμενο θα συμβεί για $T = \pi\sqrt{(m/k)}/\epsilon$.

ΘΕΜΑ Β

(1) $\vec{B} = -\hat{\rho}(\partial\mathcal{A}/\partial z) + \hat{z}(1/\rho)(\partial(\rho\mathcal{A})/\partial\rho)$ Όχι η μορφή του πεδίο στο επίπεδο x, z επαναλαμβάνεται με στροφή γύρω από τον άξονα z.

(2) $L = m\vec{v}^2/2 + q\vec{v}\cdot\vec{A} = (1/2)m(r\dot{h}o^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + q\rho\dot{\phi}\mathcal{A}(\rho, z, t)$

(3) Η ϕ. Διατηρείται η $p_\phi = m\rho^2\dot{\phi} + q\rho\mathcal{A}$.

(4) Αρχικά $\rho(0) = 1, \phi(0) = 0, \dot{\rho}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 1$ και τελικά $\rho(0) = 2, \phi(0) = \pi/2, \dot{\rho}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 1$. Έτσι

$$p_\phi = m = 4m + q\mathcal{A}(1)$$

οπότε $\mathcal{A}(1) = -3m/q$.

(5) Αν ήταν χρονοανεξάρτητο θα είχαμε καθαρό μαγνητικό πεδιο και όχι ηλεκτρικό, οπότε η ταχύτητα θα είχε σταθερό μέτρο. Επομένως δεν είναι συμβατές.

ΘΕΜΑ Γ

(1)

$$\dot{x} = pe^{-2\gamma t}, \dot{p} = -\omega^2 x e^{2\gamma t}$$

οπότε

$$\ddot{x} = \dot{p}e^{-2\gamma t} - 2\gamma p e^{-2\gamma t} = -\omega^2 x - 2\gamma\dot{x}$$

δηλαδή περιγράφει αρμ. ταλαντωτή με γραμμική τριβή.

(2) Η αγκύλη Poisson είναι 1 επομένως είναι κανονικός και $H = X^2/2 + \omega^2 P^2/2$.

(3) $L = e^{2\gamma t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)/2$.

(4) $S = \int_0^{1/\gamma} dt e^{2\gamma t}(\dot{x}^2 - \gamma^2 x^2)/2$.

(5)

$$\begin{aligned} S &= \frac{\gamma}{2}\int_0^1 d\tau e^{2\tau}\left(\left[d(ye^{-\tau})/d\tau\right]^2 - y^2 e^{-2\tau}\right) \\ &= \frac{\gamma}{2}\int_0^1 d\tau[(\dot{y}-y)^2 - y^2] \\ &= \frac{\gamma}{2}\int_0^1 d\tau[(\dot{y})^2 - 2y\dot{y}] \end{aligned} \tag{3}$$

Το τελευταίο μέρος του ολοκληρώματος είναι ένα νούμερο για τα δεδομένα ακριανά σημεία. Αυτό το ολοκλήρωμα που μένει έχει τη μορφή της δράσης ελευθέρου σωματιδίου και επομένως στασιμοποιείται για μια γραμμική συνάρτηση του τ. Έτσι $y(\tau) = 1 + \tau$, οπότε $x(t) = (1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$.