



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική II

5 Οκτωβρίου 2015

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαίτερος. Όλα τα ερωτήματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Δύο σημειακά σωματίδια με μάζες m_1 και m_2 , αντίστοιχα, μπορούν να κινούνται στον άξονα x εξαιτίας της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης και μόνο.

1. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος των 2 σωματιδίων.
2. Ποια συμμετρία χαρακτηρίζει το σύστημα αυτό (κατασκευάστε τον αντίστοιχο γεννήτορα) και ποια διατήρηση συνεπάγεται αυτή;
3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Jacobi του συστήματος. Ποια η φυσική του σημασία;
4. Αρχικά τα σωματίδια βρίσκονται **ακίνητα** στις θέσεις $x_1 = d \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$ και $x_2 = -d \cdot m_1 / (m_1 + m_2)$, όπου d μια σταθερή θετική παράμετρος με διαστάσεις μήκους. Ποια η τιμή των δύο παραπάνω διατηρούμενων ποσοτήτων για το σύστημα αυτό;
5. Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange του συστήματος και συνδυάστε τις κατάλληλα ώστε να διαπιστώσετε τις διατηρήσεις των ερωτημάτων (2), (3).
6. Με βάση το ολοκλήρωμα Jacobi και χρησιμοποιώντας τη διατήρηση του ερωτήματος (2) υπολογίστε τις ταχύτητες των δύο σωματιδίων όταν θα βρεθούν στο μισό της αρχικής τους απόστασης ελκόμενα βαρυτικά.

ΘΕΜΑ Β Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m που κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή $V(x) = kx^2/2$. Το σωματίδιο ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το σημείο $x = 0$ και καταλήγει στο σημείο $x = 1$ τη χρονική στιγμή $t = 1$.

1. Να υπολογιστεί η δράση του σωματιδίου που αντιστοιχεί στη φυσική διαδρομή για τα δεδομένα αρχικά και τελικά σημεία του θεσεογραφικού χώρου.
2. Να συγκριθεί αυτή στο όριο $k \rightarrow 0$ με την αναμενόμενη τιμή της δράσης για ελεύθερο σωματίδιο.

ΘΕΜΑ Γ Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται υπό την επίδραση ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, αλλά είναι δεσμευμένο να κινείται πάνω στην ευθεία $y = kx$, $z = 0$. Το πεδίο είναι αυτό ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου με βαθμωτό δυναμικό $\phi = -Hx$ και ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = -My\hat{\mathbf{x}}$ με H, M σταθερές παράμετροι.

1. Να κατασκευαστεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου με κατευθείαν αντικατάσταση του δεσμού.
2. Να κατασκευαστεί η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου με τη βοήθεια ενός πολλαπλασιαστή Lagrange.
3. Να κατασκευαστεί η Χαμιλτονιανή του σωματιδίου από τη Λαγκρανζιανή του ερωτήματος (1).
4. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενή και βρείτε την κατεύθυνσή τους.
5. Από τη Λαγκρανζιανή του ερωτ. (1) βρείτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και λύστε την.
6. Από τη Λαγκρανζιανή του ερωτήματος (2) κατασκευάστε την εξίσωση κίνησης και υπολογίστε την αντίδραση του δεσμού χρησιμοποιώντας τη λύση (όσον αφορά στην κίνηση) που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

ΘΕΜΑ Β

1.

$$S = \frac{m\omega}{2} \cot \omega$$

με $\omega = \sqrt{k/m}$.

2.

$$S_{k \rightarrow 0} = m/2$$

ακριβώς το ίδιο με αυτήν ελευθέρου σωματιδίου αφού ο ταλαντωτής μετατρέπεται σε ελεύθερο σωματίδιο όταν $k \rightarrow 0$.

ΘΕΜΑ Γ