



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ II
 Τμήμα Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου
Μάρτιος 2004

Απαντήστε και στα 4 θέματα με συντομία και σαφήνεια.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

(α) Υπολογίστε τη δράση ενός σώματος που πέφτει κατακόρυφα από ύψος H μέχρι το έδαφος (ύψος 0 και δυναμική ενέργεια 0) σε ομογενές βαρυντικό πεδίο ως συνάρτηση του ύψους H και του χρόνου κίνησης.

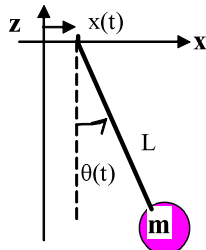
(β) Θεωρώντας ότι ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα είναι ισοδύναμος με την αρχή του Χάμιλτον που οδηγεί στις εξισώσεις Euler-Lagrange, κατασκευάστε βήμα προς βήμα τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση σε ένα δυναμικό $V(x)$. Να θεωρηθεί ότι η Λαγκρανζιανή μπορεί να διαχωριστεί ως $L(x, \dot{x}, t) = A(x) + B(\dot{x}) + C(t)$.

(γ) Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή δύο σωματιδίων που κινούνται επί μιας ευθείας και συνδέονται με ελατήριο σταθεράς k : $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$. Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος.

(δ) Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή για ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Είναι η ορμή του σωματιδίου η νευτώνεια ορμή του;

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Ένα εκκρεμές αποτελείται από μια σημειακή μάζα m στερεωμένη στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους L . Το εκκρεμές μπορεί να κινείται στο επίπεδο $x-z$ μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας $-g\hat{z}$ ($\hat{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα z). Το άλλο άκρο του εκκρεμούς μπορεί να κινείται ελεύθερα (άνευ τριβής) επί της οριζόντιας ευθείας x .

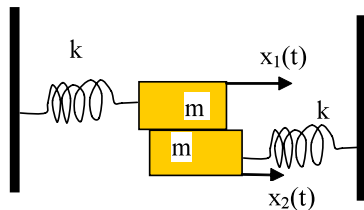


Εάν $x(t)$ είναι η απόσταση του άνω άκρου της ράβδου από κάποιο σημείο της οριζόντιας ευθείας, και $\theta(t)$ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τη κατακόρυφο (α) Εκφράστε τη ταχύτητα της μάζας συναρτήσει αυτών των συντεταγμένων και (β) γράψτε τη Λαγκρανζιανή $L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ του σωματιδίου. (γ)

Γράψτε το συνεχή μετασχηματισμό μεταθέσεων στον άξονα x , δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή είναι συμμετρική ως προς αυτό το μετασχηματισμό και προσδιορίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. Ποια η φυσική σημασία της διατηρούμενης αυτής ποσότητας; (δ) Θεωρήστε τώρα ότι το σημείο ανάρτησης κρατείται σταθερό. Δείξτε τότε ότι η ράβδος έχει δύο σημεία ισορροπίας, το ένα ευσταθές και το άλλο ασταθές. (ε) Θεωρήστε τώρα ότι το σημείο ανάρτησης επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό $\ddot{x} = a$. Δείξτε ότι και σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει ένα σημείο ευσταθούς και ένα ασταθούς ισορροπίας και προσδιορίστε τις γωνίες θ που αντιστοιχούν σε αυτά.

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Θεωρήστε δύο ίσες μάζες που βρίσκονται σε επαφή, και η καθεμία από αυτές είναι συνδεδεμένη με ίδιο ελατήριο σε ακλόνητο τοίχωμα (δεν υπάρχει βαρύτητα). Οι δύο μάζες εκτελούν οριζόντια κίνηση και επειδή βρίσκονται σε επαφή ασκείται δύναμη τριβής από τη μία στην άλλη ανάλογη με τη διαφορά ταχύτητας των μαζών. Δηλαδή η δύναμη που ασκείται στη πρώτη είναι



$F_1 = -\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, και η δύναμη που ασκείται στη δεύτερη είναι $F_2 = -F_1$, όπου x_1 η θέση της πρώτης από το σημείο ισορροπίας, και x_2 αντίστοιχα η θέση της δεύτερης. (α) Γράψτε τις δυναμικές εξισώσεις του Νεύτωνα που περιγράφουν την κίνηση των μαζών. (β) Δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ μιγαδικές εν γένει σταθερές, βρείτε τις συχνότητες των κανονικών ταλαντώσεων. Προσέξτε η μία είναι πραγματική και η άλλη μιγαδική. Ποία η φυσική σημασία της μιγαδικής συχνότητας; (γ) Περιγράψτε το είδος της κίνησης στο οποίο αντιστοιχούν οι δύο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

Θέμα 4 (25 μονάδες)

(α) Αποδείξτε ότι οι εξισώσεις του Χάμιλτον προκύπτουν από τη στασιμοποίηση της δράσης:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(q, p, t)] dt,$$

όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα θεωρείται συνάρτηση των ανεξαρτήτων μεταβλητών (q, p) και οι μεταβολές $(\delta q, \delta p)$ στην φυσική τροχιά $(q(t), p(t))$ ικανοποιούν τη συνθήκη: $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$. Ποια η διαφορά της αρχής αυτής στασιμότητας από την αρχή του Χάμιλτον;

(β) Υποθέστε τώρα ότι μετασχηματίζουμε τις συντεταγμένες (q, p) στις (q', p') όπου $q' = q'(q, p, t)$ και $p' = p'(q, p, t)$ και ότι ο μετασχηματισμός ικανοποιεί την ταυτότητα:

$$p'\dot{q}' - H'(q', p', t) = p\dot{q} - H(q, p, t) + \frac{dF(q, q', t)}{dt}, \quad (1)$$

όπου F κάποια συνάρτηση. Αποδείξτε χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της (α) ότι εάν τα (q, p) εξελίσσονται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον με Χαμιλτονιανή $H(q, p, t)$, τότε και οι συντεταγμένες (q', p') θα εξελίσσονται σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον με Χαμιλτονιανή $H'(q', p', t)$.

(γ) Εξηγήστε γιατί όταν ισχύει η (1) ο μετασχηματισμός από τις (q, p) στις (q', p') προσδιορίζεται έμμεσα από τις σχέσεις: $p = \frac{\partial F(q, q', t)}{\partial q}$, $p' = -\frac{\partial F(q, q', t)}{\partial q'}$ και οι

Χαμιλτονιανές συνδέονται μέσω της σχέσης: $H' = H + \frac{\partial F(q, q', t)}{\partial t}$.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $F = q'/q$ μετασχηματίζει τις συντεταγμένες (q, p) της Χαμιλτονιανής $H = \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2}p^2q^4$ στις συντεταγμένες (q', p') που εξελίσσονται με Χαμιλτονιανή αρμονικού ταλαντωτή. Δείξτε τέλος για αυτό το μετασχηματισμό ότι η αγκύλη Poisson των (q', p') ικανοποιεί τη σχέση: $\{q', p'\} = 1$.