# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής

*Εξέταση στη Νηχανική ΙΙ*

*28 Ιουνίου 2011*

**Θέμα Α:** Στη γεωμετρική οπτική προσέγγιση το φως διαδίδεται ακολουθώντας τροχιές που καθιστούν στάσιμο τον χρόνο μετάβασης από σημείο σε σημείο (αρχή του Fermat). Έστω μία επίπεδη λωρίδα υλικού ($-\infty < x < \infty$ και $0 \leq z \leq h$) με δείκτη διάθλασης $n(z)$ (το $n(z)$ μπορεί να λαμβάνει και τιμές μικρότερες της μονάδας) που εξαρτάται μόνο από το $z$ και δεν εξαρτάται από το $x$. Ο χρόνος μετάβασης αν ακολουθηθεί η τροχιά $z(x)$ που συνδέει τα σημεία $(x_1, z_1)$ και $(x_2, z_2)$ δίνεται απο το συναρτησοειδές $S[z(x)]$:

$$S[z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \frac{1}{c_0} \int_{x_1}^{x_2} n(z(x))\sqrt{1+\dot{z}^2}dx$$

όπου $v = c_0/n(z)$ η ταχύτητα του φωτός στο σημείο $(x, z)$. Το διαφορικό μήκος τόξου της τροχιάς είναι $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1+\dot{z}^2}dx$ και $\dot{z} = dz/dx$. Το φως θα ακολουθήσει τη τροχιά που θα καταστήσει τη "δράση" $S$ στάσιμη. Η διατύπωση αυτή για τον προσδιορισμό της τροχιάς είναι αντίστοιχη με την αρχή του Χάμιλτον με Λαγκραντζιανή $L(q, \dot{q}) = n(q)\sqrt{1+\dot{q}^2}$ αρκεί να αντιστοιχίσουμε τη συντεταγμένη $x$ με τον χρόνο $t$ και το $z$ με τη γενικευμένη θέση $q$, έτσι ώστε η τροχιά στο θεσεογραφικό χώρο $q(t)$ να αντιστοιχεί στην τροχιά στο φυσικό χώρο $z(x)$.

1. Ορίστε μέσω της Λαγκραντζιανής, κατά αναλογία με τον κλασικό ορισμό της ορμής, την "ορμή" $p$ της φωτεινής τροχιάς. Εκφράστε την $p$ συναρτήσει του δείκτη διάθλασης $n$ και της γωνίας $\theta$ που σχηματίζει η εφαπτομένη της τροχιάς με τον άξονα $x$. (Η γωνία $\theta$ ορίζεται ως $\tan\theta = \dot{z}$ και είναι $\sin\theta = \dot{z}/\sqrt{1+\dot{z}^2}$ και $\cos\theta = 1/\sqrt{1+\dot{z}^2}$ .)

2. Διατηρείται η $p$ επί της τροχιάς;

3. Κατασκευάστε την Χαμιλτονιανή $H(z, p)$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω Λαγκραντζιανή και δείξτε ότι αυτή διατηρείται επί της τροχιάς. Συγκεκριμένα δείξτε οτι η ποσότητα $n(z)\cos\theta$ παραμένει σταθερή επί της τροχιάς, όπου $\theta$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της τροχιάς με τον άξονα $x$.

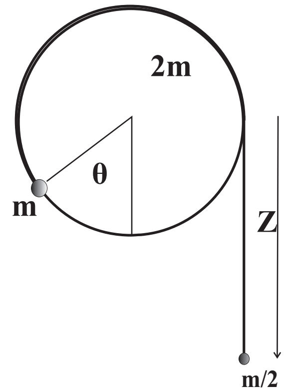
4. Θεωρήστε υλικό με σχετικό δείκτη διάθλασης $n(z) = 1$ για $z > h/2$ και $n(z) = \sqrt{2}$ για $z < h/2$. Σχεδιάστε τη φωτεινή τροχιά που σχηματίζει στην περιοχή $0 < z < h/2$ για γωνία $\theta = \pi/4$.

5. Θεωρήστε υλικό με δείκτη διάθλασης $n(z) = \sqrt{1-(z/z_0)}$. Χρησιμοποιώντας τη σταθερότητα της ποσότητας του ερωτήματος (3) δείξτε ότι η διαδρομή στάσιμου χρόνου που συνδέει τα σημεία $(x_1 = 0, z_1 = 0)$ και $(x_2 = L, z_2 = 0)$ έχει τη μορφή παραβολής $z = Ax(L-x)$ υπολογίζοντας τον κατάλληλο συντελεστή $A$. Υπάρχει μόνο μία τέτοια διαδρομή που στασιμοποιεί το χρόνο;

6. Τι θα προτείνατε για να μετατρέψετε αυτό το υλικό σε οπτική ίνα για τη μεταφορά φωτός στην κατεύθυνση $x = \infty$;

**Θέμα Β:** Στην περιφέρεια μιας τροχαλίας μάζας $2m$ και ακτίνας $a$ βρίσκεται στερεωμένη μία μάζα $m$ που κινείται μαζί με την τροχαλία. Ένα λαστιχάκι είναι περασμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας έτσι ώστε το ένα του άκρο να είναι συνδεδεμένο στη μάζα $m$ ενώ στο άλλο του άκρο το οποίο κρέμεται κάτω από την τροχαλία είναι συνδεδεμένη μάζα $m/2$ (βλ. σχήμα). Η τροχαλία ασκεί αμελητέα τριβή στο λαστιχάκι. Το σύστημα βρίσκεται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας που έχει ένταση $g$. Η κατάσταση του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί από τη γωνία $\theta$ που σχηματίζει η μάζα $m$ με την κατακόρυφο, και την κατακόρυφη απόσταση της μάζας $m/2$ από το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο της τροχαλίας.

Το φυσικό μήκος του λάστιχου είναι $l_0 = (3\pi/2)a$.




1. Γράψτε τη Λαγκραντζιανή του συστήματος (δίδεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας μάζας $2m$ είναι $I = ma^2$).
2. Προσδιορίστε τη γωνία $\theta_e$ στην οποία το σύστημα ισορροπεί καθώς και την κατακόρυφη θέση $z_e$ στο σημείο ισορροπίας (θεωρήστε μόνο το σημείο ισορροπίας $\theta_e$ για το οποίο $\theta_e < \pi/2$.)
3. Γράψτε τη γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή γύρω από το σημείο ισορροπίας και κατασκευάστε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας.
4. Δείξτε ότι οι κανονικοί τρόποι ταλαντωσης γύρω από το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζονται από συχνότητες που ικανοποιούν τη σχέση:
$$\omega^4 - \left(\frac{5k}{2m} + \frac{\sqrt{3}\,g}{4a}\right)\omega^2 + \frac{\sqrt{3}\,kg}{2ma} = 0$$
5. Στο όριο που το ελατήριο είναι πολύ σκληρό ($ka >> mg$ ) δείξτε ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες προσεγγίζουν τις συχνότητες $\omega_1^2 = (5k)/(2m)$ (που αντιστοιχεί σε μια υψίσυχνη ταλάντωση) και $\omega_2^2 = (\sqrt{3}g)/(5a)$. Ποιοί είναι οι αντίστοιχοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης σε αυτό το όριο;
6. Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος που αντιστοιχεί στπ 2ο τρόπο ταλάντωσης, σκεπτόμενοι τι σημαίνει το όριο $ka >> mg$.

   [Υπόδειξη: για τον υπολογισμό του ορίου οποτεδήποτε εμφανίζεται ένας γραμμικός συνδυασμός των $k$ και $mg/a$, ή αντίστοιχα $ka^2$ και $mga$ στους πίνακες, αγνοήστε τελείως τον πολύ μικρότερο 2ο όρο.]

**Θέμα Γ:**

1. Μεγάλος αριθμός ιδίων σωματιδίων μοναδιαίας μάζας βρίσκονται σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας $\omega = 1$. Δεν γνωρίζουμε ούτε τη θέση ούτε την ορμή τους με βεβαιότητα, γνωρίζουμε όμως ότι έχουν προπαρασκευασθεί έτσι ώστε να καλύπτουν με σταθερή πυκνότητα όλες τις δυνατές καταστάσεις στο χώρο των φάσεων με ενέργεια $E \leq 1/2$. Σχεδιάστε την περιοχή του χώρου των φάσεων που καταλαμβάνουν τα σωματίδια. Πόσα σωματίδια έχουμε αν η πυκνότητα αυτών στο χώρο των φάσεων είναι $\rho$ σταθερή;
2. Προσδιορίστε το γραμμικό μετασχηματισμό των θέσεων και τον ορμών που προκύπτει από τη δυναμική εξέλιξη του συστήματος κατά $t$ χρονικές μονάδες δηλαδή προσδιορίστε τον $2 \times 2$ πίνακα $\Phi(t)$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$
   Σχεδιάστε το χωρίο που καταλαμβάνουν τα σωματίδια του ερωτήματος (1) μετά απο χρόνο $t$.
3. Υπολογίστε την ορίζουσα του γραμμικού μετασχηματισμού $\Phi(t)$. Τι σημαίνει το αποτέλεσμα; Δείξτε τώρα ότι επειδή ο αριθμός των καταστάσεων δεν αλλάζει κατά τη χρονική εξέλιξη, δεν αλλάζει ούτε και η πυκνότητα των καταστάσεων στο χώρο των φάσεων.
4. Ξαφνικά το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή μηδενίζεται (το ελατήριο σπάει). Προσδιορίστε και σχεδιάστε το χωρίο που θα καταλαμβάνουν τα σωματίδια μετά την πάροδο χρόνου $T = 2$ από τη στιγμή που μηδενίστηκε το δυναμικό. Πόση θα είναι τώρα η πυκνότητα των καταστάσεων;

Υπόδειξη: Κάθε τετραγωνική μορφή $Ax^2 + By^2 + Cxy = 1$ η οποία περιγράφεται από μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο $x - y$ παριστάνει μια έλλειψη της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας σχηματίζει γωνία $\theta$ με τον $x$-άξονα η οποία καθορίζεται από τη σχέση:
$$\tan(2\theta) = \frac{C}{A - B}.$$

# Λύσεις

**Θέμα Α:**

1. 
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{n(z)\dot{z}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = n\sin\theta.$$

2. Όχι γιατι η $L$ εξαρτάται από το $z$ μέσω του $n(z)$.

3. 
$$H = p\dot{z} - L = \ldots = -\sqrt{n(z)^2 - p^2}.$$

   Αφού η $H$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το $x$ διατηρείται κατά μήκος της τροχιάς. Από το ερώτημα (1) $H = \sqrt{n^2 - n^2\sin^2\theta} = n\cos\theta$ θεωρώντας ότι όλα είναι θετικά. Η ποσότητα λοιπόν αυτή διατηρείται κατά την κίνηση, δηλαδή περνώντας σε ποιο χαμηλού $n$ περιοχή το $\cos\theta$ πρέπει να αυξηθεί και επομένως η τροχιά να γίνει πιο παράλληλη με τον άξονα $x$. Επιπλέον βλέπουμε ότι αν αυτή η ποσότητα είναι θετική δεν μπορεί να γίνει αρνητική οπότε απαγορεύονται οι $\theta > \pi/2$.

4. Η διατηρούμενη ποσότητα είναι $\sqrt{2}\cos 45^\circ = 1$, οπότε όταν φτάσει στη διαχωριστική επιφάνεια $z = h/2$ θα συνεχίσει μέσα στο δεύτερο υλικό με $\cos\theta = 1$ δηλαδή με $\theta = 0$ επομένως θα κινηθεί πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια. Υπάρχει βέβαια και άλλη μια δυνατότητα, να επιστρέψει στο πρώτο υλικό κινούμενο με αντίθετη γωνία $-45^\circ$ η οποία και έχει το ίδιο συνημίτονο όπως και η αρχική.

5. Πρέπει
$$\frac{\sqrt{1-(z/z_0)}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = C.$$

   Αναπτύσσοντας όλους τους όρους αριθμητή και παρονομαστή με τη δεδομένη παραβολή $z(x)$ θα έχουμε
$$1 - (AL/z_0)x - (A/z_0)x^2 = C^2(1 + A^2L^2 - 4LA^2x + 4A^2x^2).$$

   Θα πρέπει λοιπόν να είναι
$$1 + A^2L^2 = 4Az_0 = 4Az_0$$

   συγκρίνοντας τους συντελεστές των όρων του $x$. Δηλαδή
$$L^2A^2 - 4z_0A + 1 = 0.$$

   . Τα κατάλληλα $A$ είναι οι λύσεις της β'βαθμιας αυτής δηλαδή $A = 2z_0/L^2 \pm \sqrt{(2z_0/L^2)^2 - 1/L^2}$. Υπάρχει λοιπόν μια ρηχή και μια πολύ τοξωτή παραβολή. Με αριθμητικό υπολογιμό του χρόνου η ρηχή απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο.

6. Φτιάχνοντας ένα σάντουιτς από τέτοιο υλικό με τη μέγιστη τιμή του $n$ στην κοινή επιφάνεια και το $n$ να μικραίνει εκατέρωθεν αυτής όπως παραπάνω, οποιαδήποτε δέσμη φωτός θα ακολουθεί μια διαδρομή πάνω - κάτω παραβολών προχωρώντας κατά μήκος του $x$ δηλαδή της κοινής επιφάνειας.

   Αν κάποιος θεωρήσει όχι το υλικό με το συνεχώς μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης αλλά αυτόν του ερωτήματος (4) με το σταθερό $n$ σε διαφορετικά στρώματα θα μπορούσε κανείς να φτιάξει σάντουιτς με αραιό-πυκνό-αραιό υλικό έτσι ώστε η φωτεινή ακτίνα να ανακλάται πάνω-κάτω στις δύο διαχωριστικές επιφάνειες κινούμενη τελικά κατά μήκος του μεσαίου στρώματος.

**Θέμα Β:**

1.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(ma^2\dot\theta^2 + I\dot\theta^2 + (m/2)\dot z^2) - \frac{1}{2}k[(3\pi/2-\theta)a + z - l_0]^2 + (m/2)gz + mga\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}(2ma^2\dot\theta^2 + (m/2)\dot z^2) - \frac{1}{2}k[(z-a\theta]^2 + (m/2)gz + mga\cos\theta \end{aligned}$$

2. Από την απαίτηση $\partial V/\partial\theta = \partial V/\partial z = 0$ στο σημείο ισορροπίας παίρνουμε

$$-ak(z_e - a\theta_e) + mga\sin\theta_e = k(z_e - a\theta_e) - (m/2)g = 0$$

και λύνοντας βρίσκουμε $\theta_e = \pi/6, z_e = a\pi/6 + mg/(2k)$. Δεν ασχολούμαστε με το άλλο σημείο $\theta_e = 5\pi/6, z_e = a5\pi/6 + mg/(2k)$ το οποίο είναι ασταθές.

3. Αναπτύσσοντας τη Λαγκρανζιανή γύρω από το σημείο ισορροπίας $z = z_e + \zeta, \theta = \pi/g + \phi$ και αγνοώντας τους σταθερούς όρους η Λαγκρανζιανή γραμμικοποιείται στην

$$L_\gamma = ma^2\dot\phi^2 + \frac{m}{4}\dot\zeta^2 - \frac{1}{2}k(\zeta - a\phi)^2 - mga\frac{\sqrt{3}}{4}\phi^2.$$

Οι πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2ma^2 & 0 \\ 0 & m/2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{K} = \begin{pmatrix} ka^2 + \sqrt{3}mga/2 & -ka \\ -ka & k \end{pmatrix}.$$

4. Ο προσδιορισμός των ιδιοσυχνοτήτων δίνει $(ka^2 + \sqrt{3}mga/2 - 2ma^2\omega^2)(k - m\omega^2/2) - k^2a^2 = 0$. Η σχέση αυτή καταλήγει μετά από πράξεις στη ζητούμενη Β'βάθμια εξίσωση

$$\omega^4 - \left(\frac{5k}{2m} + \frac{\sqrt{3}\,g}{4a}\right)\omega^2 + \frac{\sqrt{3}kg}{2ma} = 0.$$

5. Στο όριο που το ελατήριο είναι πολύ σκληρό ($k/m >> g/a$) αν αγνοήσουμε το μικρό όρο στο συντελεστή του $\omega^2$ θα βρούμε

$$\omega^2 = \frac{\frac{5k}{2m} \pm \sqrt{(\frac{5k}{2m})^2 - 4\frac{\sqrt{3}kg}{2ma}}}{2} = \frac{5k}{4m}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\frac{\sqrt{3}kg}{2ma}}{(\frac{5k}{2m})^2}}\right).$$

Στη συνέχεια αναπτύσσοντας τη ρίζα ως προς το μικρό κλάσμα ($\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$) βρίσκουμε $\omega_1^2 \simeq (5k)/(2m)$ και $\omega_2^2 \simeq (\sqrt{3}g)/(5a)$. Οι δε κανονικοί τρόποι υπολογίζονται εύκολα αν αγνοήσει κανείς από τους πίνακες τον όρο $\sqrt{3}mga/2$, θέσει την εκάστοτε συχνότητα και ψάξει λύσεις του

$$\begin{pmatrix} ka^2 - 2ma^2\omega^2 & -ka \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0$$

που αποτελεί την πρώτη σειρά του πίνακα $\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2$. Έτσι

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4a \end{pmatrix}, \; X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

6. Ο δεύτερος τρόπος ταλάντωσης που αντιστοιχεί σε πολύ σκληρό λάστιχο, και δεν έχει εξάρτηση από το $k$ αντιστοιχεί στην ταλάντωση του συστήματος όταν το λάστιχο γίνει μη εκτατό νήμα. Αυτό φαίνεται και από τον τρόπο ταλάντωσης αφού όσο $\phi$ στραφεί η τροχαλία, η $m/2$ κατεβαίνει κατά $z$ ίσο με το μήκος του νήματος που απελευθερώνεται $z = a\phi$. Ο άλλος τρόπος ταλάντωσης του οποίου η συχνότητα συνδέεται με $k$ σχετίζεται με αυξομειώσεις του μήκους του λάστιχου.

   Έχει αρλετό ενδιαφέρον να μελετήσετε το άλλο όριο και να βρείτε τους δύο τρόπους ταλάντωσης. Είναι τότε οι δύο ιδιοσυχνότητες η μία εξαρτώμενη από τη βαρύτητα και η άλλη από τη σκληρότητα του λάστιχου;

**Θέμα Γ:**

1. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος είναι $H = \frac{1}{2}(p^2+x^2)$. Η Χαμιλτονιανή έχει τιμή ίση με την ενέργεια επομένως η περιοχή του χώρου των φάσεων με $E \leq 1/2$ είναι το εσωτερικό του κύκλου μοναδιαίας ακτίνας $x^2 + p^2 \leq 1$. Αφού τα σωματίδια κατανέμονται με ίση πυκνότητα σε αυτό το χώρο θα πρέπει $\rho = N/\pi$ επομένως $N = \pi\rho$.

2. Λύνοντας τις εξισώσεις του Χάμιλτον έχουμε

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \ , \ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x$$

   με λύση

$$x(t) = x(0)\cos t + p(0)\sin t \ , \ p(t) = -x(0)\sin t + p(0)\cos t$$

   οπότε ο $\Phi(t)$ θα είναι

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

   Ο παραπάνω πίνακας είναι απλώς ένας πίνακας στροφής κατά γωνία $-t$. Επομένως κάθε κατάσταση εντός του κυκλικού χωρίου θα στραφεί κατά γωνία $-t$ και το χωρίο θα παραμείνει απαράλλαχτο. Είναι εύκολο να δει κανείς εξάλλου ότι $x(t)^2 + p(t)^2 = x(0)^2 + p(0)^2 \leq 1$.

3. $\det\Phi(t) = 1$. Η ιδιότητα αυτή δείχνει ότι ο μετασχηματισμός που προκαλεί ο διαδότης $\Phi(t)$ διατηρεί το εμβαδόν στο χώρο των φάσεων. Αφού ισχύει αυτό το κάθε στοιχειώδες εμβαδόν που περιέχει λακοιο πλήθος καταστάσεων θα εξελιχθεί σε ένα άλλο ίσο εμβαδόν και θα περιέχει το ίδιο πλήθος καταστάσεων. Επομένως η πυκνότητα θα διατηρηθεί. Αυτό ισχύει πάντα κατά τη Χαμιλτονιανή δυναμική. Ειδικά ο εν λόγω μετασχηματισμός θα στρέψει όλες τις καταστάσεις κατά την ίδια γωνία και επομένως θα κρατήσει όχι μόνο την πυκνότητα και τα εμβαδά συαθερά αλλά και τα ίδια τα σχήματα των στοιχειωδών εμβαδών.

4. Έστω ότι τη στιγμή $t = 0$ η χαμιλτονιανή αλλάζει και γίνεται αυτή ενός ελευθέρου σωματιδίου με μάζα 1. Δηλαδή $H = p^2/2$. Τώρα οι εξισώσεις κίνησης θα είναι

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \ , \ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

   με λύση

$$x(t) = x(0) + p(0)t \ , \ p(t) = p(0).$$

   Επομένως οι διάφορες καταστάσεις εντός του κυκλικού χωρίου θα αρχίσουν να κινούνται οι μεν με $p(0) > 0$ προς τα δεξιά, οι δε με $p(0) < 0$ προς τα αριστερά. Μάλιστα όσο πιο μεγάλη η τιμή της $|p(0)|$ τόσο πιο πολύ θα απομακρυνθούν οι αντίστοιχες καταστάσεις από τον άξονα των $p$. Επομένως ο κύκλος θα παραμορφωθεί. Το περίβλημα του χωρίου $x(0)^2 + p(0)^2 = 1$ μετά από χρόνο $T = 2$ θα γίνει $(x(2) - 2p(2))^2 + p(2)^2 = 1$. Η ανηγμένη μορφή αυτού είναι

$$x(2)^2 + 5p(2)^2 - 4x(2)p(2) = 1.$$

ΑΑυτή είναι μια τετραγωνική μορφή που περιγράφει μια κλειστή καμπύλη (αφού αποτελεί παραμόρφωση του κύκλου) και επομένως πρόκειται για έλλειψη στραμένη κατά γωνία

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{-4}{1-5} = \pi/8.$$

Η πυκνότητα των καταστάσεων θα είναι πάλι ίδια, αφού η νέα Χαμιλτονιανή δυναμική, όπως και προηγουμένως, κρατά τα εμβαδά ίδια (θεώρημα Liouville).