



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Εξετάσεις Μηχανικής II
26 Ιουνίου 2017

Προσπαθήστε να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαίτερα. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται εντός του πηγαδιού δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ για } |x| \leq 1 \\ +\infty & , \text{ για } |x| > 1 \end{cases}$$

Το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά ($t_1 = 0$) στη θέση $x_1 = x(t_1) = -1$ και αργότερα, τη χρονική στιγμή $t_2 > t_1$ στη θέση $x_2 = x(t_2) = -1$ και πάλι. Θεωρήστε ότι εξαιτίας απειρισμού του δυναμικού εκτός του διαστήματος $[-1, 1]$, το σωματίδιο δεν μπορεί να κινηθεί εκτός αυτής της περιοχής. **[ΠΡΟΣΟΧΗ:** Όλα τα ερωτήματα να απαντηθούν **χωρίς** τη χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange.]

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου που κινείται εντός του πηγαδιού.
2. Δείξτε κάνοντας χρήση της αρχής του Χάμιλτον ότι η χωροχρονική διαδρομή $x(t) = -1$ για $t \in [t_1, t_2]$ θα μπορούσε να είναι μια φυσική τροχιά του σωματιδίου.
3. Ελέγξτε αν μεταξύ των διαδρομών που ανακλώνται στο άλλο άκρο της επιτρεπτής περιοχής, η διαδρομή

$$x(t) = \begin{cases} -1 + \frac{2(t-t_1)}{t_0-t_1} & , \text{ για } t_1 \leq t < t_0 \\ 1 - \frac{2(t-t_0)}{t_2-t_0} & , \text{ για } t_0 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

θα μπορούσε να είναι και αυτή φυσική διαδρομή για το εν λόγω σωματίδιο. Αν όχι, ρυθμίστε καταλλήλως την παράμετρο t_0 ώστε να καταστεί και αυτή φυσική διαδρομή.

4. Συγκρίνατε την τιμή της δράσης της διαδρομής του ερωτήματος 3 με αυτήν του 2.
5. Μπορείτε να προτείνετε άλλες φυσικές διαδρομές για το σωματίδιο;
6. **(bonus)** Επιχειρηματολογήστε γιατί μια φυσική διαδρομή **δεν** μπορεί να ξεφύγει από τα όρια του πηγαδιού. [Υποθέστε ότι μια διαδρομή σαν αυτή του ερωτήματος 3 δεν κινείται εντός του πηγαδιού ($|x| \leq 1$), αλλά εκτός του πηγαδιού (στην περιοχή $x < -1$), όπου το δυναμικό έχει πολύ μεγάλη τιμή $V_0 \gg 1$, αλλά όχι άπειρη. Σε τι βάθος εντός αυτής της περιοχής θα διείσδυε το σωματίδιο ώστε να καταστήσει τη δράση του ελάχιστη;]

Πρόβλημα Β Δύο σωματίδια με μάζες m_1, m_2 είναι δεσμευμένα να κινούνται επί των γραμμών $y_1 = z_1 = 0$ και $y_2 = 0, z_2 = a$. Τα σωματίδια συνδέονται με αβαρές ελατήριο σταθεράς k και μηδενικού φυσικού μήκους. [Αγνοήστε το βάρος των σωματιδίων.]

1. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος. (Χρησιμοποιήστε καρτεσιανές συντεταγμένες και εισάγετε τους δεσμούς απευθείας στη Λαγκρανζιανή). Πόσων βαθμών ελευθερίας είναι το σύστημα αυτό.
2. Εισάγετε κατάλληλους πολλαπλασιαστές Lagrange που να εξασφαλίζουν τη z θέση του κάθε σωματιδίου (δεν είναι ανάγκη να το κάνετε και για τις y θέσεις). Πόσων βαθμών ελευθερίας είναι τώρα η Λαγκρανζιανή;

3. “Σπάστε” την τελευταία Λαγκρανζιανή σε 2 ανεξάρτητες Λαγκρανζιανές. Από αυτήν που αφορά το ζευγάρι x_1, x_2 υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες και τους αντίστοιχους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος.
4. Από την άλλη Λαγκρανζιανή υπολογίστε τις δυνάμεις των δεσμών. Είναι αυτές χρονοεξαρτώμενες; Εξηγήστε το αποτέλεσμα σας με νευτώνειο τρόπο.
5. Αν αρχικά οι μάζες είχαν ταχύτητες $v_{01}, v_{02} = -\kappa v_{01}$, στον άξονα x , βρείτε την τιμή του συντελεστή κ ώστε οι μάζες να εκτελέσουν περιοδική κίνηση.

Πρόβλημα Γ Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση δυναμικού $V(x)$ διαγράφοντας στο χώρο των φάσεων την καμπύλη $p = p_0(2 + \cos x)$, με $p_0 > 0$.

1. Κατασκευάστε το δυναμικό που διέπει την κίνηση του σωματιδίου.
2. Προσδιορίστε τη τιμή της Χαμιλτονιανής (ενέργειας) που αντιστοιχεί στη δεδομένη κίνηση. Αποδείξτε ότι το σωματίδιο σε αυτή τη περίπτωση δεν ακινητοποιείται σε καμία θέση x .
3. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή της Χαμιλτονιανής (ενέργειας), ώστε το σωματίδιο να κινείται σε όλη την έκταση του άξονα x (η κίνηση δεν θα δίνεται πλέον από την παραπάνω έκφραση).
4. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή Χαμιλτονιανής (ενέργειας), E_{min} , που μπορεί να έχει το σωματίδιο σε αυτό το δυναμικό. Πού θα μπορούσε να είναι εντοπισμένο το σωματίδιο τότε; Θεωρήστε τώρα ότι η ενέργεια είναι $E = E_{min} + \epsilon$, μόλις μεγαλύτερη από την E_{min} . Υπολογίστε τον χρόνο που απαιτείται για να διανύσει το σωματίδιο το πλήρες εύρος της κίνησης στην περίπτωση αυτή (την ημιπερίοδο της αντίστοιχης ταλάντωσης).

Πρόβλημα Δ Ένα φορτισμένο σωματίδιο φορτίου Q κινείται εντός ομογενούς ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

1. Βρείτε κατάλληλο ανυσματικό και βαθμωτό δυναμικό που να περιγράφουν τα παραπάνω ομογενή πεδία. Αφού τα πεδία προκύπτουν από παραγωγίσεις των δυναμικών, δοκιμάστε ως πιθανά δυναμικά τα $\mathbf{A} = (k_1x + k_2y + k_3z, p_1x + p_2y + p_3z, q_1x + q_2y + q_3z)$, $\Phi = r_1x + r_2y + r_3z$, τα οποία αποτελούν γραμμικές συναρτήσεις των συντεταγμένων και βρείτε κατάλληλα k_i, p_i, q_i, r_i .
2. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου και δείξτε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange επιδέχονται ως λύση την κίνηση

$$x(t) = 0, \quad y(t) = -(E/B)t, \quad z(t) = 0.$$

3. Τώρα αλλάξτε συντεταγμένες στο αρχικό πρόβλημα ως ακολούθως:

$$\eta = x, \quad \xi = y + \frac{E}{B}t, \quad \zeta = z.$$

Ξαναγράψτε τη Λαγκρανζιανή στις καινούργιες συντεταγμένες. Αφού αφαιρέσετε από αυτήν όλους τους όρους που αποτελούν μετασχηματισμούς βαθμονόμησης, δείξτε ότι το πρόβλημα είναι ανάλογο με την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο ακριβώς σαν αυτό του αρχικού προβλήματος, δίχως την παρουσία ηλεκτρικού πεδίου. Γνωρίζοντας ότι η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μια έλικα με άξονα αυτόν του πεδίου, εξηγήστε ποια θα είναι η τροχιά του σωματιδίου στο σύνθετο πεδίο του προβλήματος.

Λύσεις Πρόβλημα Α

1.

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2}$$

2. Η δράση στη προτεινόμενη κίνηση είναι $S_{12}([-1]) = 0$. Θεωρήστε τώρα την παραλλαγμένη κίνηση $x(t) = -1 + \varepsilon\eta(t)$ (με $2 > \varepsilon\eta > 0$ ώστε το σωματίδιο να παραμένει εντός του πηγαδιού και $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$) η δράση γίνεται:

$$S_{12}[-1 + \varepsilon\eta] = S_{12}([-1]) + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\eta}^2$$

Συνεπώς η τροχιά $x(t) = -1$ καθιστά τη δράση στάσιμη, δεδομένου ότι η μεταβολή από την προτεινόμενη τροχιά είναι τάξης ε^2 , και άρα η τροχιά αντιστοιχεί σε φυσική κίνηση του σωματιδίου. Μάλιστα αυτή η δράση αυτής της κίνησης είναι το ολικό ελάχιστο της δράσης διότι κάθε μεταβολή της τροχιάς οδηγεί σε αύξηση της δράσης κατά $\varepsilon^2/2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}^2 dt > 0$.

3. Η διαδρομή για το πρώτο κομμάτι $t_1 < t < t_0$ ελαχιστοποιεί τη δράση μεταξύ των παραπλήσιων διαδρομών αφού

$$S[x_{10} + \eta] = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} dt (2/(t_0 - t_1) + \dot{\eta})^2 = 2/(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} dt \dot{\eta}^2$$

(ο γραμμικός όρος ως προς $\dot{\eta}$ μηδενίζεται ταυτοτικά λόγω συνοριακών συνθηκών $\eta(t_1) = \eta(t_0) = 0$). Η παραπάνω δράση ελαχιστοποιείται για $\eta = 0$. Το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο κομμάτι της διαδρομής. Αυτό που μένει είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη συνολική δράση ως προς τη μεταβλητή t_0 .

$$S_{102} = 2 \left(\frac{1}{t_0 - t_1} + \frac{1}{t_2 - t_0} \right)$$

Από την απαίτηση $dS_{102}/dt_0 = 0$ βρίσκουμε $t_0 = (t_1 + t_2)/2$, οπότε κινείται για ίσους χρόνους προς τα δεξιά και προς τα αριστερά.

Κανονικά κανείς πρέπει να ελέγξει και αν η εν λόγω διαδρομή είναι στάσιμη και ως προς τη χωρική θέση του ενδιαμέσου σημείου (όχι μόνο ως προς την τιμή του t_0) για να πει ότι είναι φυσική διαδρομή. Αν δοκιμάσει κανείς να μετατοπίσει το ενδιαμέσο σημείο από τη θέση $+1$ στη θέση $+1 - \delta$, την ίδια χρονική στιγμή t_0 που βρήκαμε παραπάνω, θα διαπιστώσει ότι η δοσμένη διαδρομή **δεν** καθιστά τη δράση στάσιμη ($\delta S \propto \delta$). Αυτός είναι και ο λόγος που η διατύπωση του ερωτήματος αναζητά φυσικές διαδρομές μεταξύ των διαδρομών που περνούν από το $x = +1$.

4. $S_{102\min} = \frac{8}{t_2 - t_1}$. Προφανώς αυτή είναι μεγαλύτερη από την $S_{12} = 0$.

5. Φυσική διαδρομή (με δεδομένο πλήθος ανακλάσεων) είναι οποιαδήποτε ταλάντωση με σταθερή ταχύτητα μπρος-πίσω με περάσματα από το -1 σε χρόνους $t_1 + (t_2 - t_1)k/N$ και από το $+1$ σε χρόνους $t_1 + (t_2 - t_1)(k + 0.5)/N$, όπου $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ και N το πλήθος των ταλαντώσεων. Η δράση για τη διαδρομή αυτή είναι

$$S_N = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \left(\frac{4}{(t_2 - t_1)/N} \right)^2 = \frac{8N^2}{t_2 - t_1}$$

6. Έστω ότι η κίνηση εκτελούνταν προς τα αριστερά σε ένα δυναμικό $V_0 \gg 1$. Τότε η δράση θα ήταν

$$S = \left(\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{x}^2 \right) - V_0(t_2 - t_1)$$

Ο τελευταίος όρος είναι σταθερός και δεν μεταβάλλεται με επιλογή της διαδρομής. Ο αριστερός όρος ελαχιστοποιείται μόνο αν $x(t) = \text{σταθ} = -1$. Στην περίπτωση όμως αυτή δεν θα έχουμε είσοδο στην απαγορευμένη περιοχή. Τώρα μπορούμε να πάμε στο όριο $V_0 \rightarrow \infty$, αφού η τιμή του δεν παίζει κανένα ρόλο στην ελαχιστοποίηση της δράσης, οπότε και πάλι δεν θα μπορεί το σωματίδιο να μπει στην απαγορευμένη περιοχή.

Πρόβλημα Β

1. Επιβάλλοντας τους δεσμούς στο πρόβλημα έχουμε

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + a^2]$$

Προφανώς η Λαγκρανζιανή είναι 2 βαθμών ελευθερίας (2 σωματίδια σε 3-διάστατο χώρο και 4 δεσμοί).

2.

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) - \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2] + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 (z_2 - a)$$

Πρόκειται για Λαγκρανζιανή με 6 βαθμούς ελευθερίας $(x_1, x_2, z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)$. Αν εισαγάγαμε και δεσμούς για τις y θέσεις θα είχαμε άλλους 4 βαθμούς ελευθερίας.

3.

$$L = L_x + L_z$$

όπου

$$L_x = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2$$

και

$$L_z = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 - \frac{k}{2} [(z_1 - z_2)^2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 (z_2 - a)]$$

Η πρώτη Λαγκρανζιανή είναι γραμμικοποιημένη και έχει πίνακα κινητικής και δυναμικής ενέργειας

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τη λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2)$ βρίσκουμε $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{k/\mu}$, όπου $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Ο 1ος τρόπος ταλάντωσης είναι ο $(1, 1)^T$ και ο 2ος ο $(m_2, -m_1)^T$.

4. Από την L_z βρίσκουμε

$$m_1 \ddot{z}_1 - k(z_1 - z_2) - \lambda_1 = 0 \quad , \quad m_2 \ddot{z}_2 + k(z_1 - z_2) - \lambda_2 = 0 \quad , \quad z_1 = 0 \quad , \quad z_2 = a$$

Εισάγοντας στις 2 πρώτες τις σταθερές τιμές των 2 τελευταίων παίρνουμε

$$\lambda_1 = ka = -\lambda_2$$

Αυτές είναι οι τιμές των δυνάμεων αντίδρασης των δεσμών. Οι δυνάμεις είναι χρονοανεξάρτητες αφού η κίνηση των 2 σωματιδίων επί του άξονα x μπορεί να αλλάζει τη δύναμη του ελατηρίου συν τω χρόνω, αλλά η προβολή αυτής της δύναμης κάθετα στις γραμμές συνδέεται μόνο με την z επιμήκυνση του ελατηρίου, η οποία είναι σταθερή.

5. Για να είναι περιοδική η κίνηση θα πρέπει να βρίσκεται σε “λειτουργία” μόνο ο καθαρά ταλαντωτικός τρόπος ταλάντωσης (ο #2). Επομένως οι αρχικές ταχύτητες πρέπει να είναι σύμφωνες με τον 2ο τρόπο ταλάντωσης, δηλαδή

$$(v_{01}, v_{02})^\top \parallel (m_2, -m_1)^\top$$

Συνεπώς $\kappa = m_1/m_2$.

Πρόβλημα Γ

1. Οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου είναι $\dot{x} = \partial H / \partial p$ και $\dot{p} = -\partial H / \partial x$ με

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Από τη δεδομένη καμπύλη στο χώρο των φάσεων γνωρίζουμε την $p(x)$ και επομένως και την dp/dx . Έτσι

$$-p_0 \sin x = \frac{dp}{dx} = \frac{\dot{p}}{\dot{x}} = \frac{-dV/dx}{p/m}$$

οπότε βρίσκουμε

$$\frac{dV}{dx} = \frac{p_0^2}{m} (\sin x)(2 + \cos x) = \frac{p_0^2}{m} \left[2 \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]$$

και με μια ολοκλήρωση

$$V(x) = -\frac{p_0^2}{m} \left[2 \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x \right] + V_0$$

Στο εξής θα θέσουμε $V_0 = 0$ αφού η τιμή της δυναμικής ενέργειας δεν έχει σημασία παρά μόνο οι διαφορές αυτής. Εξάλλου αν διατηρήσουμε την V_0 θα αναπροσαρμοστεί και η τιμή της Χαμιλτονιανής αναλόγως.

2. Η τιμή της Χαμιλτονιανής είναι αυτή που θα πάρουμε αν θέσουμε στη θέση του p τη δοσμένη συνάρτηση του x . Έτσι

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{p_0^2}{2m} (4 + 4 \cos x + \cos^2 x) - \frac{p_0^2}{m} \left[2 \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x \right] + V_0 \\ &= \frac{p_0^2}{2m} (4 + \cos^2 x - \cos^2 x + 1/2) + V_0 = \frac{9p_0^2}{4m} \end{aligned} \quad (1)$$

Προφανώς το σωματίδιο δεν ακινητοποιείται σε καμία θέση αφού

$$\frac{p^2}{2m} = H - V = \frac{p_0^2}{4m} (9 + 8 \cos x + \cos 2x) = \frac{p_0^2}{2m} (4 + 4 \cos x + \cos^2 x) = \frac{p_0^2}{2m} (2 + \cos x)^2 > 0.$$

Επομένως το σωματίδιο δεν αλλάζει πρόσημο ταχύτητας (ή κινείται συνεχώς προς τα θετικά ή συνεχώς προς τα αρνητικά x).

3. Θα πρέπει να βρούμε ποια είναι η ελάχιστη τιμή της H ώστε σε κάθε x να ισχύει $p^2 > 0$.

Έστω ότι η ελάχιστη αυτή τιμή είναι $H_1 = \kappa p_0^2/4m$. Τότε

$$\frac{p^2}{2m} = H_1 - V = \frac{p_0^2}{4m}(\kappa + 8 \cos x + \cos 2x) > 0.$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Τα ελάχιστα της παράστασης εντός της παρένθεσης είναι οι ρίζες της

$$-8 \sin x_1 - 2 \sin 2x_1 = 0$$

με

$$-8 \cos x_1 - 4 \cos 2x_1 > 0$$

Από την 1η βρίσκουμε $4 \sin x_1 + 2 \sin x_1 \cos x_1 = 0$ οπότε $x_1 = k\pi$ και από τη 2η απομένουν μόνο τα $x_1 = (2k+1)\pi$. Θα πρέπει λοιπόν το $\kappa + 8(-1) + 1 > 0$ δηλαδή $\kappa > 7$. Η τιμή λοιπόν της Χαμιλτονιανής θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από $\frac{7p_0^2}{4m}$.

4. Για να έχουμε κίνηση του σωματιδίου θα πρέπει να υπάρχει περιοχή του x ώστε στην περιοχή αυτή $p^2/(2m) = H_2 - V > 0$. Δηλαδή θα πρέπει η τιμή της Χαμιλτονιανής H_2 να υπερβαίνει τα ελάχιστα του δυναμικού. Έστω $H_2 = \lambda \frac{p_0^2}{4m}$ η ζητούμενη αυτή τιμή. Θέλουμε

$$\frac{p_0^2}{4m}(\lambda + 8 \cos x + \cos 2x) > 0$$

σε κάποια περιοχή των x . Ζητάμε τώρα την μέγιστη τιμή της παράστασης μόλις να ξεπερνά το 0. Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση τα μέγιστα συμβαίνουν σε $x_2 = 2k\pi$ και στα σημεία αυτά θα πρέπει

$$\lambda + 8 \cos x_2 + \cos 2x_2 > 0$$

δηλαδή $\lambda > -8 - 1 = -9$ οπότε

$$H_{\text{abs min}} = -9 \frac{p_0^2}{4m}$$

Αν λοιπόν $H = E_{\text{min}} + \epsilon = (-9 + \epsilon') \frac{p_0^2}{4m}$ θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} &= (-9 + \epsilon') \frac{p_0^2}{4m} - V(x) \\ &= \frac{p_0^2}{4m}(-9 + \epsilon' + 8 \cos x + \cos 2x) \\ &\underset{x \simeq x_2=0}{\simeq} \frac{p_0^2}{4m}(\epsilon' - 8 \frac{x^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2}) \\ &= \frac{p_0^2}{4m}(\epsilon' - 6x^2) \end{aligned} \tag{2}$$

Πρόκειται για εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή της μορφής

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{3p_0^2}{m} \frac{x^2}{2} = \epsilon' \frac{p_0^2}{2m}$$

επομένως το ισοδύναμο k είναι $3p_0^2/m$ και η ημιπερίοδος είναι $T/2 = \pi\sqrt{m/k} = \pi m/(\sqrt{3}p_0)$. Αν και οι διαστάσεις του παραπάνω αποτελέσματος είναι διαστάσεις αντίστροφης ταχύτητας και μοιάζουν λανθασμένες, οφείλονται στο ότι η ύπαρξη της μεταβλητής x εντός των $\cos$ θεωρεί την x αδιάστατη. Αν υπήρχε κάποια σταθερά με διαστάσεις μήκους L να εμφανίζεται στις παραστάσεις μαζί με το x (π.χ. $x \rightarrow x/L$) η ποσότητα L θα διόρθωνε τις διαστάσεις της τελικής παράστασης του T .

Στο πρόβλημα αυτό θα μπορούσε κανείς να εξετάσει τα 2 τελευταία ερωτήματα ψάχνοντας τα μέγιστα του δυναμικού για το (3) και τα ελάχιστα του δυναμικού για το (4) και στη συνέχεια να μελετήσει κανείς μικρές ταλαντώσεις γύρω από τα ελάχιστα αυτά.

Πρόβλημα Δ

1. Αφού $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ και $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ αν θεωρήσουμε τα προτεινόμενου τύπου πεδία βρίσκουμε

$$\mathbf{B} = (q_y - p_z, k_z - q_x, p_x - k_y) \quad , \quad \mathbf{E} = -(r_x, r_y, r_z)$$

οπότε η μοναδική πληροφορία που έχουμε για τους συντελεστές είναι

$$r_x = -E, r_y = 0, r_z = 0, p_x - k_y = B, q_y - p_z = 0, k_z - q_x = 0$$

Ας θέσουμε λοιπόν όλους τους συντελεστές 0 εκτός των

$$r_x = -E, p_x = B$$

δηλαδή $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ και $\Phi = -Ex$.

- 2.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + QBx\dot{y} + QEx$$

με εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - QB\dot{y} - QE &= 0 \\ m\ddot{y} + QB\dot{x} &= 0 \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x = 0, y = -(E/B)t, z = 0$ φαίνεται αμέσως ότι ικανοποιούνται οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης.

- 3.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + (\dot{\xi} - E/B)^2 + \dot{\zeta}^2) + QB\eta(\dot{\xi} - E/B) + QE\eta \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2) - \dot{\xi}mE/B + \frac{m}{2}(E^2/B^2) + QB\eta\dot{\xi} \end{aligned} \quad (3)$$

Ο 2ος και ο 3ος όρος αποτελούν μετασχηματισμό βαθμονόμησης οπότε μπορούν να αφαιρεθούν. Μένουμε λοιπόν με τη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2) + QB\eta\dot{\xi}$$

η οποία είναι η Λαγκρανζιανή ενός φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο που προέρχεται από το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}' = (0, B\eta, 0)$ αφού στις καρτεσιανές συντεταγμένες (η, ξ, ζ) (ανάλογες των (x, y, z)) η συνάρτηση που πολλαπλασιάζει την $\dot{x}i$ (τη 2η συντεταγμένη) είναι η $QB\eta$. Το πρόβλημα λοιπόν είναι ισοδύναμο με την κίνηση ενός φορτίου σε μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Αφού η τροχιά στις νέες συντεταγμένες θα είναι μια έλικα που περιελίσσεται γύρω από τον άξονα ζ , στις αρχικές συντεταγμένες θα είναι μια έλικα που περιελίσσεται γύρω από τον z και ταυτόχρονα θα παρασύρρεται κατά μήκος του y άξονα με ταχύτητα $-E/B$ (αφού $y = \xi - (E/B)t$). Αν δεν υπάρχει αρχική ταχύτητα κατά μήκος του z άξονα η κίνηση θα είναι μια γενικευμένη κυκλοειδής στο επίπεδο $x - y$ (ομαλή κυκλική με ταχύτητα ίση με την αρχική ταχύτητα συν μια ταχύτητα σταθερή κατά τον y άξονα, ίση με $-(E/B)\hat{\mathbf{y}}$).