



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική II

11 Ιουνίου 2012

Απαντήστε και στα 4 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α: 20 μόρια Με προσεκτικά βήματα κατασκευάστε τις εξισώσεις Χάμιλτον ξεκινώντας από τις εξισώσεις Euler-Lagrange (αρκεί να παράγετε την κατασκευή αυτή για ένα φυσικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας με Λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q}, t)$). Δείξτε επίσης ότι η Χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι σταθερά της κίνησης όταν η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο.

ΘΕΜΑ Β: 25 μόρια Θεωρήστε την κίνηση μιας μικροσκοπικής φυσαλίδας μάζας m η οποία γλυστράει άνευ τριβής πάνω σε μια σφαιροειδή (όχι σφαιρική) επιφάνεια $(x^2 + y^2)/\epsilon^2 + z^2 = 1$ με $0 < \epsilon \leq 1$, σε ένα αβαρές περιβάλλον.

1. Σχεδιάστε την σφαιροειδή αυτή επιφάνεια. Πόσων βαθμών ελευθερίας είναι το σύστημα αυτό;
2. Για να περιγράψουμε την κίνηση της φυσαλίδας επιλέγουμε τις συντεταγμένες θ, ϕ παραμετροποιώντας κάθε σημείο της επιφάνειας ως εξής:

$$x = \epsilon \sin \theta \cos \phi, \quad y = \epsilon \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta,$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης της φυσαλίδας με τον άξονα z . Προσδιορίστε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$ της φυσαλίδας.

3. Δείξτε ότι η ποσότητα

$$E = \frac{p_\theta^2}{2m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}$$

διατηρείται κατά τη κίνηση (α είναι μία θετική σταθερά). Τι φυσικό νόημα έχει η σταθερά α ;

4. Γράψτε τώρα την παραπάνω εξίσωση στη μορφή:

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\theta) = 0$$

χρησιμοποιώντας πάλι τη σχέση μεταξύ p_θ και $\dot{\theta}$. Σχεδιάστε ποιοτικά το ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(\theta)$ όταν $\epsilon = 1$ προσδιορίζοντας παράλληλα τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της $\theta(t)$ για σταθερές τιμές των α και E . Υπάρχει περίπτωση να μην έχει ρίζες η εξίσωση $V_{\text{eff}}(\theta) = 0$;

5. Αν $\epsilon < 1$ εξακολουθούν να υπάρχουν αυτές οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της θ ; Μπορεί η φυσαλίδα να περάσει από τους πόλους του σφαιροειδούς ($\theta = 0, \theta = \pi$);

Θέμα Γ: 25 μόρια Τρία σωματίδια, το καθένα μάζας m , κινούνται σε μία ευθεία γραμμή. Οι θέσεις των σωματιδίων επί της ευθείας η οποία συμπεριλαμβάνει και την αρχή είναι αντίστοιχα: x_1, x_2 και x_3 . Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις που προκύπτουν από το δυναμικό:

$$V = \frac{m}{2} \Omega^2 \left[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right].$$

1. Περιγράψτε ένα φυσικό σύστημα που περιγράφεται από αυτό το δυναμικό.
2. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων και δείξτε ότι οι συχνότητες ω των χαρακτηριστικών (κανονικών) ταλαντώσεων του συστήματος ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0,$$
όπου $\lambda = \omega^2/\Omega^2$.

3. Εξαιτίας της εξαιρετικά συμμετρικής μορφής του δυναμικού θα περίμενε κανείς η κατάσταση όπου όλες οι συντεταγμένες είναι συνεχώς ίδιες μεταξύ τους θα αποτελούσε έναν τρόπο ταλάντωσης. Ελέγξτε το και βρείτε και τη συχνότητα αυτού. Επιβεβαιώστε ότι η τιμή αυτή του αντίστοιχου λ είναι ρίζα του παραπάνω πολυωνύμου.
4. Τώρα που ξέρετε μία ρίζα βρείτε και τις υπόλοιπες. Υπάρχει εκφυλισμός;
5. Προσέξτε ότι το προηγούμενο δυναμικό μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$V = \frac{m}{2}\Omega^2 \left[4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 \right].$$

και εξηγήστε γιατί αποτελεί κανονικό τρόπο ταλάντωσης το $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Η εξίσωση αυτή περιγράφει έναν ή περισσότερους τρόπους ταλάντωσης;

Θέμα Δ: 30 μόρια Θεωρήστε ένα σημειακό φορτίο q μάζας m που κινείται στο επίπεδο $z = 0$ σε σταθερό μαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό: $\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$, όπου (x, y) οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματιδίου στο επίπεδο.

1. Γράψτε την Λαγκρανζιανή του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες καθώς και σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.
2. Υπολογίστε τη δράση σε μία κυκλική τροχιά ($r(t) = R$) η οποία διαγράφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ($\dot{\theta} = \omega$). Προσδιορίστε το μέτρο και το πρόσημο της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta} = \omega$ αν γνωρίζετε ότι μία τέτοια κυκλική κίνηση είναι φυσική τροχιά για κάθε ακτίνα R (δηλαδή $r(t) = R + \epsilon$ με ϵ πολύ μικρό και $\dot{\theta} = \omega$ είναι και πάλι φυσική τροχιά).
3. Από τη μορφή της Λαγκρανζιανής στις πολικές συντεταγμένες (όπου απουσιάζει η συντεταγμένη θ) βρείτε μια ποσότητα που διατηρείται. Είναι η ποσότητα αυτή η κλασική νευτώνεια στροφορμή $mr^2\dot{\theta}$;
4. Γνωρίζετε ότι η κίνηση ενός τέτοιου σωματιδίου είναι μια κυκλική τροχιά η οποία διαγράφεται με σταθερή ταχύτητα u (για ευκολία υποθέστε ότι η τροχιά δεν περικλείει την αρχή των αξόνων). Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και το κέντρο του κύκλου, τέμνει την κυκλική τροχιά σε δύο σημεία ένα κοντινό και ένα μακρινό. Από τη διατήρηση της προηγούμενης ποσότητας και τη σχέση $r\dot{\theta} = \pm u$ στα σημεία αυτά, υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου και τη φορά διαγραφής της κυκλικής τροχιάς δεδομένου του $u > 0$ (για θετικά επίσης q και B).
5. Τώρα σχεδιάστε και τις εφαπτομένες του κύκλου αυτού που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Πόσο είναι το $\dot{\theta}$ στα σημεία επαφής; Από τη διατήρηση της γενικευμένης στροφορμής του ερωτήματος (3) (θεωρώντας την γνωστή) υπολογίστε την απόσταση των σημείων αυτών από την αρχή των αξόνων.
6. Από τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα υπολογίστε σε τι απόσταση βρίσκεται το κέντρο του κύκλου από την αρχή των αξόνων; Αν η σχέση που βγάλατε για την απόσταση αυτή ισχύει ακόμη και όταν η αρχή βρίσκεται εντός του κύκλου, ποιο το συμπέρασμά σας για το φυσικό νόημα του προσήμου της διατηρούμενης ποσότητας;

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Αν κατασκευάσουμε το μετασχηματισμό Legendre της L ως προς $\dot{q}$

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

θα έχουμε

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$$

και

$$\frac{\partial H}{\partial q} = p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p}.$$

Επίσης

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Όμως

$$\frac{\partial H}{\partial t} = p \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

οπότε

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

αν η L είναι χρονοανεξάρτητη.

ΘΕΜΑ Β:

1. Πρόκειται για μια σφαιροειδή επιφάνεια (επιμηκυμένη σφαίρα) περίπου σαν τη μπάλα του rugby (όπως έγραψε και ένας φοιτητής). Η τομή της επιφάνειας αυτής με επίπεδα παράλληλα στο $x - y$ είναι κύκλοι με μέγιστο αυτόν που ορίζει το επίπεδο $x - y$ ακτίνας ϵ . Όντας κίνηση σε μια επιφάνεια πρόκειται για σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας.
2. Η Λαγκρανζιανή είναι απλώς η κινητική ενέργεια επί της επιφάνειας αφού δεν υπάρχει δυναμικό πεδίο.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

και πρέπει να αντικατασταθεί το z από τη λύση του δεσμού. Με τις νέες συντεταγμένες

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon(\cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi}) \\ \dot{y} &= \epsilon(\cos \theta \sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}) \\ \dot{z} &= -\sin \theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

και έτσι

$$L = \frac{1}{2}m[(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + \epsilon^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2]$$

και η Χαμιλτονιανή θα είναι

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} + \frac{p_\phi^2}{2m\epsilon^2 \sin^2 \theta}.$$

3. Όντας χρονοανεξάρτητη η L η H διατηρείται και είναι ίση με μια σταθερά E

$$= \frac{p_\theta^2}{2m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta}$$

όπου $\alpha = p_\phi^2/(2\epsilon^2 m)$ και επομένως η σταθερά αυτή συνδέεται με τη z συνιστώσα που επίσης διατηρείται λόγω μη εξάρτησης της L από τη ϕ .

4. Επαναφέροντας την $\dot{\theta}$ στη θέση της p_θ έχουμε

$$m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} - E = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\frac{\alpha}{\sin^2 \theta} - E}{m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = 0 \quad (1)$$

επομένως

$$V_{\text{eff}} = \frac{\frac{\alpha}{\sin^2 \theta} - E}{m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

που για $\epsilon = 1$ (σφαίρα) γίνεται

$$V_{\text{eff}} = \frac{\frac{\alpha}{\sin^2 \theta} - E}{m}.$$

Το δυναμικό αυτό τείνει στο $+\infty$ για $\theta \rightarrow 0, \pi$ και είναι συμμετρικό γύρω από το $\theta = \pi/2$. Επίσης πρέπει να είναι αρνητικό στο ελάχιστό του $(\alpha - E)/m$ στο $\theta = \pi/2$ αλλιώς δεν θα υπήρχε κίνηση (βλέπε σχέση 1). Αν είναι 0 στο σημείο αυτό θα είχαμε απλώς κίνηση κατά μήκος του ισημερινού με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$. Γενικά η κίνηση θα γίνεται μεταξύ των ριζών της V_{eff} οι οποίες θα είναι και παραπληρωματικές λόγω συμμετρικότητας του δυναμικού.

5. Και σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε κάποιες ακραίες γωνίες (τις ρίζες του V_{eff}) οι οποίες θα είναι πάλι παραπληρωματικές (συμμετρικό δυναμικό $V_{\text{eff}}(\theta) = V_{\text{eff}}(\pi - \theta)$). Για να περάσει από τους πόλους θα πρέπει να λείπει ο απειρισμός του δυναμικού στα $\theta \rightarrow 0, \pi$. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν $\alpha = 0$. Τότε

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{E}{m(\epsilon^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}$$

που είναι συνεχώς σταθερού προσήμου που οδηγεί τη φουσαλίδα περιοδικά στους πόλους (κίνηση κατά μήκος μεσημβρινού).

ΘΕΜΑ Γ:

1. 3 ίδια σωματίδια ενωμένα ανά δύο και το καθένα με την αρχή με ίδια ελατήρια.
- 2.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0$$

με

$$\mathbf{M} = m\mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{K} = m\Omega^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Η εύρεση των συχνοτήτων προκύπτει από τη λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\det(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) = 0$ που προκύπτει να είναι το δοσμένο πολυώνυμο.

3. Αν θέσουμε

$$\mathbf{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^2 \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε $\omega^2 = \Omega^2$ δηλαδή $\lambda = 1$. Πράγματι το 1 είναι ρίζα αυτού του πολωνύμου.

4. Το πολυώνυμο γνωρίζοντας τη μια ρίζα σπάει σε

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4)^2 = 0$$

οπότε οι άλλες δύο ιδιοσυχνότητες είναι ίδιες (εκφυλισμός).

5. Αν θέσουμε $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ τότε φαίνεται με τη νέα μορφή του δυναμικού ότι η Λαγκρανζιανή γίνεται αυτή τριών ανεξάρτητων ταλαντωτών συχνότητας $\omega^2 = 4\Omega^2$ ο καθένας (φυσικά αυτοί οι ταλαντωτές θα πρέπει να έχουν πλάτη που προστιθέμενα να δίνουν 0). Επομένως υπάρχουν άπειροι τρόποι να φτιάξουμε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης με αυτή τη συχνότητα. Αν θέλουμε να είναι ορθογώνιοι μπορούμε να φτιάξουμε 2, για παράδειγμα τους $(11 - 2)$ και $(1 - 10)$.

ΘΕΜΑ Δ:

1.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2}(-y\dot{x} + x\dot{y})$$

και

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{qB}{2}r^2\dot{\theta}$$

2.

$$S = \frac{1}{2}mr^2\omega^2T + \frac{qB}{2}r^2\omega T$$

Για να είναι αυτή φυσική τροχιά θα πρέπει $S[R + \epsilon] - S[R] = O(\epsilon^2)$ επομένως ο συντελεστής του R^2 θα πρέπει να είναι 0, δηλαδή $\omega = -qB/m$.

3.

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}qBr^2$$

η οποία διαφέρει από την κλασική στροφορμή.

4. Όπως βρήκαμε η φορά είναι ωρολογιακή (αρνητική $\dot{\theta}$). Επομένως η κοντινή ακτίνα r_1 θα έχει $r_1\dot{\theta}_1 = u$ και η μακρινή ακτίνα r_2 θα έχει $r_2\dot{\theta}_2 = -u$. Έτσι

$$p_\theta = mr_1(u) + \frac{1}{2}qBr_1^2 = mr_2(-u) + \frac{1}{2}qBr_2^2$$

και λύνοντας βρίσκουμε

$$mu = \frac{qB}{2}(r_2 - r_1) = qBR.$$

Αν δεν ξέραμε τη φορά θα τη βρήκαμε βάζοντας με τυχαίο τρόπο τα πρόσημα των ταχυτήτων στα δύο σημεία και θα βρήκαμε την ακτίνα θετική η αρνητική. Αυτός ο συνδυασμός που θα έδινε θετική ακτίνα θα έδινε τη σωστή φορά διαγραφής του κύκλου.

5. Στα σημεία επαφής των εφαπτομένων που η απόσταση από την αρχή είναι r_3 είναι $\dot{\theta} = 0$ οπότε

$$p_\theta = \frac{1}{2}qBr_3^2.$$

6. Το κέντρο του κύκλου είναι σε απόσταση

$$r_0 = \sqrt{r_3^2 + R^2} = \sqrt{\left(\frac{mu}{Bq}\right)^2 + \frac{2p_\theta}{qB}}.$$

Για να είναι η αρχή εντός του κύκλου θα πρέπει $r_0 < R$ οπότε θα πρέπει να είναι $p_\theta < 0$. Το πρόσημο λοιπόν της γενικευμένης στροφορμής έχει αυτό το φυσικό νόημα.