# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
# ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
# ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

**Τμήμα Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου**

**Ιούλιος 2003**

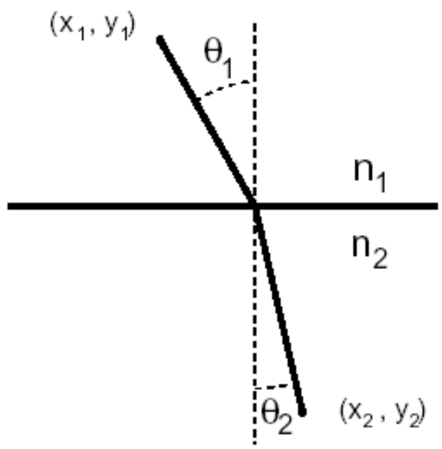
***Απαντήστε και στα 4 θέματα με συντομία και σαφήνεια. Η πλήρης απάντηση ενός θέματος έχει βάρος μεγαλύτερο από το άθροισμα των μερικών υποερωτήματων του θέματος.***

**Καλή σας επιτυχία και καλό σας καλοκαίρι.**

**Θέμα 1 (25 μονάδες)**

(α) Διατυπώστε με σαφήνεια την αρχή του Χάμιλτον. Αναφέρατε δύο πλεονέκτηματα της διατύπωσης των νόμων της μηχανικής μέσω της αρχής του Χάμιλτον.

(β) Σύμφωνα με την αρχή του Fermat το φως διανύει τη διαδρομή η οποία ελαχιστοποιεί τον συνολικό χρόνο. Θεωρήστε ότι το φως διαδίδεται στο επίπεδο $(x, y)$ σε ένα μέσο το οποίο έχει δείκτη διάθλασης $n(y)$ που εξαρτάται μόνο από την $y$ συντεταγμένη. Η ταχύτητα του φωτός σε αυτό το μέσο είναι τότε $v = c/n(y)$. Έστω ότι το φως μεταβαίνει από το σημείο $(x_1, y_1)$ στο σημείο $(x_2, y_2)$ ακουλουθώντας τη διαδρομή $x(y)$. ($\beta_1$) Εκφράστε το συνολικό χρόνο, $T$, που απαιτείται για να μεταβεί το φως από το ένα σημείο στο άλλο ως ένα συναρτησοειδές της διαδρομής $x(y)$. ($\beta_2$) Δείξτε ότι η καμπύλη που καθιστά το χρόνο μετάβασης στάσιμο έχει την ιδιότητα: $n(y)\dfrac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} =$ σταθερό, όπου $x' = dx/dy$. ($\beta_3$) Εάν το μέσο είναι ομογενές οπότε $n =$ σταθερό, τι καμπύλη ακολουθεί το φως; ($\beta_4$) Θεωρήστε ένα μέσο στο οποίο $n = n_1$ για $y > 0$ και $n = n_2$ για $y > 0$ (όπως στο σχήμα). Δείξτε τότε ότι η διαδρομή του φωτός ικανοποιεί το νόμο της διάθλασης του Snell:




$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 .$$

**Θέμα 2 (25 μονάδες)**

(α) Στο πρόβλημα αυτό θεωρούμε μονοδιάστατο φυσικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη γενικευμένη θέση $q$ και τη γενικευμένη ορμή $p$, η δυναμική του οποίου εξελίσσεται στο διδιάστατο χώρο των φάσεων από την Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(q, p, t)$. Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Ορίστε στη συνέχεια την αγκύλη Poisson δύο δυναμικών μεταβλητών $\{A(q,p,t), B(q,p,t)\}$. Δείξτε ότι κάθε δυναμική μεταβλητή εξελίσσεται σύμφωνα με το νόμο:

$$\frac{dA(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial A(q,p,t)}{\partial t} + \{A, H\}.$$

β) Θεωρήστε ένα εκκρεμές που αποτελείται από μία στερεά αλλά άβαρή ράβδο μεταβλητού μήκους $l(t)$ στο ένα άκρο της οποίας είναι συνδεδεμένη σημειακή μάζα $m$. Το άλλο άκρο είναι προσαρτημένο σε σταθερό σημείο που επιτρέπει όμως την αιώρηση της ράβδου σε κατακόρυφο επίπεδο υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας. Το μήκος της ράβδου μειώνεται με σταθερό ρυθμό $\alpha$, ενώ αρχικά η ράβδος είχε μήκος $l_0$. ($\beta_1$) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος συναρτήσει της γωνίας $\theta$, που σχηματίζει η ράβδος με τη κατακόρυφο, και της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}$. ($\beta_2$) Ορίστε τη γενικευμένη ορμή $p_\theta$ που είναι συζυγής στη γωνία $\theta$. ($\beta_3$) Κατασκευάστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H(\theta, p_\theta, t)$. ($\beta_4$)

Υπολογίστε το χρονικό ρυθμό μεταβολής $\frac{dH}{dt}$ κατα τη κίνηση. Τι συμβαίνει όταν το $\alpha$ είναι μηδέν. ($\beta_5$) Θεωρήστε τη δυναμική στην προσέγγιση $\theta << 1$ οπότε η δυναμική είναι αυτή ενός αρμονικού ταλαντωτή μεταβλητής μάζας και μεταβλητής σταθεράς επαναφοράς ενός ισοδυνάμου ελατηρίου. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή σε αυτή τη προσέγγιση. ($\beta_6$) Στα πλαίσια της προσέγγισης $\theta << 1$ θεωρώντας ότι ο ρυθμός μεταβολής είναι πολύ αργός ώστε σε χρόνο μιας περιόδου του εκκρεμούς να μην γίνεται αισθητή η μεταβολή του μήκους του εκκρεμούς διαγράψτε την τροχιά στο χώρο των φάσεων όταν αρχικά το μήκος είναι $l_0$ και αργότερα όταν είναι μικρότερο. Η προσέγγιση $\theta << 1$ εξακολουθεί να ισχύει με την πάροδο του χρόνου; ($\beta_7$) Χωρίς να κάνετε τη προσέγγιση $\theta << 1$ μπορείτε να προβλέψετε την κίνηση του εκκρεμούς καθώς το μήκος της ράβδου μειώνεται και τείνει στο μηδέν. (δεν απαιντούνται υπολογισμοί).

**Θέμα 3 (25 μονάδες)**

Δύο ίσες μάζες $m$ συνδέονται με αβαρές γραμμικό ελατήριο σκληρότητας $k$ και μηδενικού φυσικού μήκους. Οι δύο αυτές μάζες αρχικά βρίσκονται στην ίδια θέση. Το σύστημα αφήνεται να πέσει στο ομογενές βαρυτικό πεδίο. Εξαιτίας όμως ενός πολύ μικρού ταρακουνήματος κατά τη ρίψη των δύο μαζών, η μία εκ των δύο ξεκινά την πτώση με μια μικρή αρχική κατακόρυφη ταχύτητα προς τα κάτω μέτρου $u_0$ ενώ η άλλη με την ίδια αρχική κατακόρυφη ταχύτητα αλλά προς τα επάνω.

(α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος χρησιμοποιώντας ως γενικευμένες συντεταγμένες τις $X=(x_2+x_1)/2$, $Z=(z_2+z_1)/2$ του κέντρου μάζας του συστήματος, και τις $x=x_2-x_1$, $z=z_2-z_1$ της σχετικής θέσης των δύο μαζών. [Θεωρήστε ότι η κίνηση πραγματοποιείται στο κατακόρυφο επίπεδο (x,z) όπου x ο οριζόντιος άξονας και z ο κατακόρυφος.]

(β) Ποιο κομμάτι της Λαγκρανζιανής αναφέρεται σε ταλαντώσεις του συστήματος και ποιες είναι οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοσυναρτήσεις των κανονικών τρόπων ταλάντωσης σε αυτές τις συντεταγμένες;

(γ) Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το ύψος $H$ στο οποίο βρισκόντουσαν αρχικά οι μάζες ούτως ώστε να κτυπήσει πρώτη στο έδαφος η μάζα που αρχικά κινούνταν προς τα επάνω; Στον υπολογισμό αυτόν υποθέστε ότι $u_0\sqrt{\frac{m}{k}} << H$.

(δ) Ποιος από τους δύο τρόπους ταλάντωσης είναι διεγερμένος στο παρόν σύστημα;

**Θέμα 4 (25 μονάδες)**

(α) Γράψτε όλες τις συμμετρίες και τις αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες ενός ελεύθερου σωματιδίου.

(β) Υποθέστε ότι η Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου έχει τη μορφή $\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\left|\dot{\vec{\boldsymbol{x}}}\right|^2-\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}$, οπου $\vec{a}$ μοναδιαίο σταθερό διάνυσμα. Αφού γράψετε τον μετασχηματισμό διανύσματος σε απειροστή στροφή δείξτε ότι η παραπάνω Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμό στροφής γύρω από το σταθερό διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{a}}$. Ποια είναι η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα;

(γ) Το ανυσματικό δυναμικό ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου μπορεί να γραφεί ως $\vec{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{B}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$. Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες $(r,\theta,z)$, όπου $z$ η διεύθυνση του σταθερού $\vec{B}$, τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου με φορτίο $q$ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και βρείτε τη διατηρούμενη στροφορμή που αντιστοιχεί στη συμμετρία $\theta\rightarrow\theta+\varepsilon$. (Λάβατε μονάδες στις οποίες η ταχύτητα του φωτός είναι μονάδα).

(δ) Υποθέστε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι $r(0)=2R, \theta(0)=0, z(0)=0, \dot{r}(0)=0, \dot{\theta}(0)=-\omega/2, \dot{z}(0)=0$ όπου $\omega = qB/m$. Δείξτε ότι η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ θα παραμείνει σταθερή. Προσδιορίστε και σχεδιάστε τη κίνηση του σωματιδίου. Από το σχήμα της τροχιάς της κίνησης εξηγήστε πως η κίνηση που υπολογίσατε είναι συμβατή με τη γνωστή κυκλική κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο η οποία εκτελείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = qB/m$ (διαφέρει κατά ένα παράγοντα 2 από την προηγούμενη) και έχει ακτίνα $R = mu/Bq$.

# Λύσεις

**Θέμα 1**

1 α) Ένα μηχανικό σύστημα ακολουθεί τη διαδρομή εκείνη στο θεσεογραφικό χώρο που καθιστά τη δράση στάσιμη.

Πλεονέκτημα της διατύπωσης των φυσικών νόμων μέσω της αρχής του Χάμιλτον είναι ότι οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Αλλο πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί μέσω της αρχής αυτής και του γεγονότος ότι αποτυπώνονται οι συμμετρίες στη Λαγκρανζιανή να κατασκευασθούν οι δυναμικοί νόμοι που διέπουν φαινόμενα που είναι γενικότερα των φαινομένων της μηχανικής. Επίσης μέσω της αρχής του Χάμιλτον μπορούν να αποτυπωθούν οι συμμετρίες και εξ'αυτών να προσδιορισθούν οι διατηρούμενες ποσότητες. Τέλος δεν χρειάζεται ειδική μεταχείριση των δυνάμεων που αναπτύσσονται στους συνδέσμους.

1β$_1$) Εάν η διαδρομή είναι η καμπύλη $x(y)$ τότε ο συνολικός χρόνος θα είναι $T = \int ds/v$, όπου $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+x'^2}\,dy$, όπου $ds$ το στοιχειώδες μήκος επί της καμπύλης και $x' = dx/dy$.

Επειδή $v = c/n(y)$ έχουμε ότι ο συνολικός χρόνος είναι $T = \int_{y_1}^{y_2} \frac{n(y)\sqrt{1+x'^2}}{c} dy = \int_{y_1}^{y_2} F(x',y)dy$ όπου $F = \frac{n(y)\sqrt{1+x'^2}}{c}$.

1β$_2$) Δεδομένων των αρχικών και τελικών θέσεων ο συνολικός χρόνος καθίσταται στάσιμος για τη διαδρομή που ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

από την οποία, επειδή $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, συνεπάγεται ότι $\frac{\partial F}{\partial x'} =$ σταθερό , δηλαδή η ποσότητα $n(y)\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} =$ σταθερά.

1β$_3$) Όταν $n(y) =$ σταθερό η τροχιά του φωτός πρέπει να έχει $x' =$ σταθερό. Είναι δηλαδή ευθεία. Αν σχηματίζει δε γωνία $\theta$ (όπως στο σχήμα) η τροχιά θα είναι $x = y\tan\theta$.

$1\beta_4$) Σύμφωνα με τα προηγούμενα στο μεν πρώτο μέσο η τροχιά θα είναι $x = y\tan\theta_1$ και η διατηρούμενη ποσότητα $n(y)\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = n_1\frac{\tan\theta_1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} = n_1\sin\theta_1$. Ομοίως στο δεύτερο μέσο η τροχιά θα είναι $x = y\tan\theta_2$ και η διατηρούμενη ποσότητα θα είναι $n_2\sin\theta_2$. Συνεπώς επειδή η ποσότητα $n(y)\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}$ διατηρείται σε όλη τη τροχιά θα ισχύει ο νόμος της διάθλασης του Snell.

**Θέμα 2**

α) Βλέπε βιβλίο.

$2\beta_1$) Η Λαγκρανζιανή είναι $L = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta$.

$2\beta_2$) Η ορμή είναι $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$. Συνεπώς $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$ .

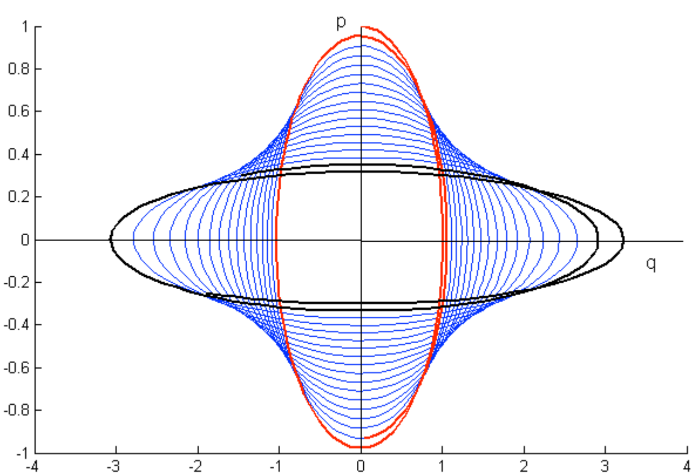
$2\beta_3$) Η Χαμιλτονιανή είναι $H = \dot{\theta}p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{ml^2} - \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta - \frac{m}{2}\alpha^2$

Συνεπώς $H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta - \frac{m}{2}\alpha^2$.

$2\beta_4$) Από το πρώτο υποερώτημα έχουμε $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H,H\} = \frac{\partial H}{\partial t}$. Άρα επειδή $\dot{l} = -\alpha$ προκύπτει αμέσως ότι $\frac{dH}{dt} = \alpha\left(\frac{p_\theta^2}{ml^3} + mg\cos\theta\right)$. Όταν $\alpha = 0$ η Χαμιλτονιανή διατηρείται κατά τη κίνηση.

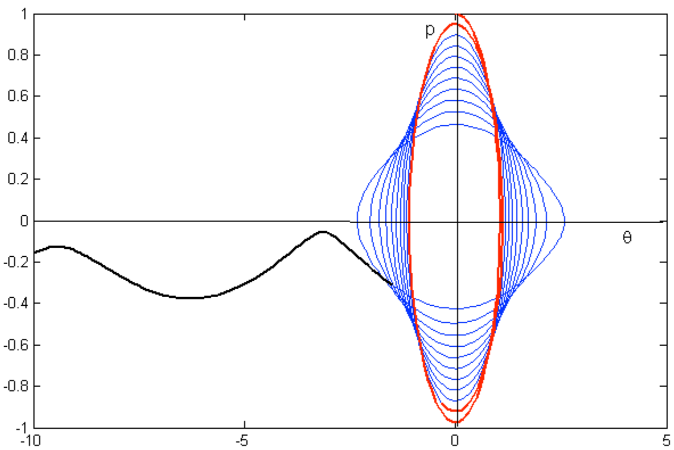
$2\beta_5$) $H = \frac{p_\theta^2}{2ml(t)^2} - mgl(t)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - \frac{m}{2}\alpha^2$

$2\beta_6$) Αν στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει το l(t) θεωρηθεί σταθερό η Χαμιλτονιανή είναι αυτή αρμονικού ταλαντωτή οπότε η τροχιά στο χώρο των φάσεων είναι έλλειψη με ημιάξονες $\sqrt{\frac{2H}{mgl}}, \sqrt{2Hm}\, l$. Δεδομένου ότι η Χαμιλτονιανή δεν είναι και αυτή σταθερά, η πλάτυνση της έλλειψης (ο λόγος των ημιαξόνων) θα μεγαλώνει σαν $l(t)^{-3/2}$, αλλά προκειμένου το εμβαδόν της έλλειψης να μένει σταθερό σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville, θα πρέπει $2H\sqrt{\frac{l}{g}}$ να μένει σταθερό, δηλαδή $H \propto l^{-1/2}$. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος της αιώρησης μεγαλώνει σαν $1/l$, δηλαδή μεγαλώνει συνεχώς οπότε η προσέγγιση της μικρής γωνίας κάποια στιγμή καταργείται.



( Συμπλήρωμα: Η κίνηση στη προσέγγιση $\theta << 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα (ο υπολογισμός έγινε με $\alpha = 0.01$). Η τροχιά μέχρι $t = 90$ έχει ζωγραφισθεί με μπλέ χρώμα. Στους αρχικούς χρόνους η τροχιά έχει ζωγραφισθεί με κόκκινο, και μετα από 80 μονάδες χρόνου με μαύρο. Φαίνεται η διαπλάτυνση των ελλείψεων με τη πάροδο του χρόνου η οποία είναι σύμφωνη με την παραπάνω ανάλυση. Στο σχήμα η θέση $q$ αντιστοιχεί στη γωνία $\theta$ ).

2β$_7$) Ακόμη και να καταργηθεί η προσέγγιση της μικρής γωνίας η τροχιά θα είναι παραμορφωμένη έλλειψη η οποία θα ανοίγει συνεχώς στον άξονα θ. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος της αιώρησης θα μεγαλώνει και κάποια στιγμή η ράβδος θα αρχίσει να περιστρέφεται με σταθερή φορά. Το ποια φορά θα έχει εξαρτάται από τη φορά περιστροφής όταν η ράβδος ξεπερνά το ανώτατο σημείο.




( Συμπλήρωμα: Η κίνηση χωρίς τη προσέγγιση $\theta << 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα (ο υπολογισμός έγινε με $\alpha = 0.01$). Η τροχιά μέχρι $t = 75$ έχει ζωγραφισθεί με μπλέ χρώμα. Στους αρχικούς χρόνους η τροχιά έχει ζωγραφισθεί με κόκκινο, και μετα από 65 μονάδες χρόνου με μαύρο. Μετά από ένα χρονικό διάστημα το εκκρεμές στριφογυρίζει περί τον άξονά του (όπως φαίνεται από το σχήμα με τη μονότονη αύξηση της γωνίας) και καταλήγει να περιστρέφεται με σταθερή στροφορμή. Η τελική φορά περιστροφής εξαρτάται ευαίσθητα από τις αρχικές συνθήκες.)

**Θέμα 3**

(α) Η Λαγκρανζιανή στις αρχικές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2 + \dot{z}_1{}^2 + \dot{z}_2{}^2) - mg(z_1 + z_2) - \frac{1}{2}k\left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right]$$

Κάνοντας την αντικατάσταση από τις αρχικές στις νέες συντεταγμένες

$x_1 = X - x/2, x_2 = X + x/2,$

$z_1 = Z - z/2, z_2 = Z + z/2,$

η Λαγκρανζιανή μετατρέπεται σε

$$L = \frac{1}{2}2m\dot{X}^2 + \left(\frac{1}{2}2m\dot{Z}^2 - 2mgZ\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2\right).$$

(β) Από τη μορφή της Λαγκρανζιανής φαίνεται αμέσως ότι η Λαγκρανζιανή έχει «σπάσει» σε τέσσερις ανεξάρτητες μονοδιάστατες Λαγκρανζιανές. Το πρώτο κομμάτι αναφέρεται σε ένα ελεύθερο σωματίδιο, το δεύτερο σε ένα σωματίδιο που πέφτει ελεύθερα στο βαρυτικό πεδίο, και τα δύο τελευταία σε δύο αρμονικούς ταλαντωτές. Όντας διαχωρισμένοι οι 2 ταλαντωτές οι ιδιοσυχνότητες διαβάζονται αμέσως ότι είναι $\omega_{x,z} = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ και οι ιδιοσυναρτήσεις κατά μήκος των x,z αντίστοιχα.

(γ) Από τις αρχικές συνθήκες $\begin{matrix} x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, z_1(0) = H, z_2(0) = H \\ \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0, \dot{z}_1(0) = u_0, \dot{z}_2(0) = -u_0 \end{matrix}$, στις αρχικές συντεταγμένες καταλήγουμε στις ακόλουθες αρχικές συνθήκες στις νέες συντεταγμένες

$x(0)=0, X(0)=0, z(0)=0, Z(0)=H$

$\dot{x}(0)=0, \dot{X}(0)=0, \dot{z}(0)=-2u_0, \dot{Z}(0)=0$

Αυτές οι συνθήκες όταν προσαρμοστούν στη γενική λύση

$X(t)=X(0)+V_x t$

$Z(t)=Z(0)+V_z t-\frac{1}{2}gt^2$ παίρνουμε $V_x=0, V_z=0, A=0, B=0, C=0, D=-2u_0/\omega$.

$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$

$z(t)=C\cos\omega t+D\sin\omega t$

Για να φθάσει στο έδαφος πρώτη η υπ' αριθμόν 1 θα πρέπει $z_1=0$ και $z_2>0$, δηλαδή $Z=z/2>0$. Συνεπώς το ύψος πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$H+\left(\frac{u_0}{\omega}\right)\sin\omega t=\frac{1}{2}gt^2$ και ο χρόνος πτώσης την ανισότητα $\sin\omega t<0$.

Θεωρώντας ότι ο παράγοντας $(u_0/\omega)$ είναι πολύ μικρός συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος της πτώσης είναι σε καλή προσέγγιση: $H=\frac{1}{2}gt^2$, δηλαδή $t=\sqrt{2H}/g$ και από την ανισότητα $\sin\omega t<0$ συνάγουμε ότι όταν το ύψος ικανοποιεί την συνθήκη:

$$(2l+1)\pi\le\omega\sqrt{2H/g}\le(2l+2)\pi \text{ , με } l=0,1,2,\ldots$$

τότε η μάζα που είχε αρχική ταχύτητα προς τα πάνω θα κτιπήσει πρώτη το έδαφος.

(δ) Το γεγονός ότι οι συντελεστές της x ταλάντωσης είναι μηδενικοί σημαίνει ότι ο αντίστοιχος κανονικός τρόπος ταλάντωσης δεν είναι διεγερμένος.

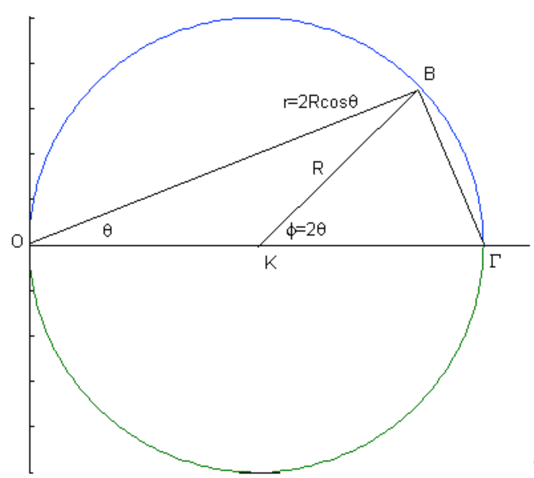
**Θέμα 4**

4α) Η Λαγρανζιανή ενός ελευθέρου σωματιδίου είναι $L=\frac{m}{2}|\dot{\vec{x}}|^2$. Η Λαγκρανζιανή αυτή είναι ανάλλοιωτη στη συμμετρία της χωρικής μετάθεσης ως προς οποιαδήποτε διεύθυνση οπότε διατηρούνται όλες οι συνισταμένες της ορμής $\vec{p}=m\dot{\vec{x}}$, είναι αναλλοίωτη στις στροφές περί οποιονδήποτε άξονα, οπότε διατηρούνται όλες οι συνισταμένες της στροφορμής $\vec{L}=\vec{x}\times\vec{p}$, επίσης είναι αναλλοίωτη στις χρονικές μεταθέσεις οπότε διοατηρείται η ενέργεια του σωματιδίου που στην περίπτωση αυτή είναι $E=\frac{m}{2}|\dot{\vec{x}}|^2$. Τέλος όλοι οι καθαροί Γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί αποτελούν γενικευμένη συμμετρία της Λαγκρανζιανής, υπό τη έννοια ότι ένα Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός οδηγεί σε μετασχηματισμό βαθμονόμησης της Λαγκρανζιανής, με αντιστοιχούσα διατηρουμενη ποσότητα την $m\vec{x}-t\vec{p}$, που υποδεικνύει ότι το σωματίδιο κινείται ευθύγραμμα και ισοταχώς. Υπάρχουν δηλαδή 10 διατηρούμενες ποσότητες όσες και οιγεννήτορες των μετασχηματισμών.

4β) Ο μετασχηματισμός διανύσματος σε απειροστή στροφή περί τον άξονα $\vec{a}$ είναι $\vec{x}(\varepsilon)=x+\varepsilon\vec{a}\times\vec{x}$ (σε πρώτη τάξη ως προς το $\varepsilon$). Αρκεί να δειχθεί η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής σε πρώτη τάξη ως πρός $\varepsilon$. Πρώτον το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας είναι ανάλλοιωτο σε μία οποιαδήποτε στροφή. Πράγματι: $\left|\dot{\vec{x}}(\varepsilon)\right|^2=|\dot{\vec{x}}|^2+2\varepsilon\dot{\vec{x}}\cdot(\vec{a}\times\dot{\vec{x}})+O(\varepsilon^2)$, οπότε επειδή είναι $\dot{\vec{x}}\cdot(\vec{a}\times\dot{\vec{x}})=0$ το πρώτο σκέλος της Λαγκρανζιανής είναι αναλλοίωτο στις στροφές. Το δεύτερο σκέλος είναι αναλλοίωτο στις στροφές περί το άξονα $\vec{a}$ διότι είναι $\vec{a}\cdot\vec{x}(\varepsilon)=\vec{a}\cdot\vec{x}+\varepsilon\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}$. Συνεπώς η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό που έχει γεννήτορα $\vec{K} = \vec{a} \times \vec{x}$. Από το θεώρημα της Noether η διατηρούμενη ποσότητα είναι η $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \cdot \vec{K} = m\dot{\vec{x}} \cdot (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{p} \cdot (\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{a} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})$, όπου $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ η ορμή. Συνεπώς διατηρείται η συνιστώσα της στροφορμής στον άξονα $\vec{a}$.

4γ) Η Λαγκρανζιανή είναι $L = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 + q\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}$. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\vec{x} = (r, 0, z)$ και $\dot{\vec{x}} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})$ οπότε το ανυσματικό δυναμικό σταθερού πεδίου είναι $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \frac{1}{2} rB\vec{e}_\theta$ και η Λαγκρανζιανή είναι
$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{qB}{2} r^2\dot{\theta}$ ή διαιρώντας δια της σταθεράς $m$ μια Λαγκρανζιανή που προσδιορίζει την κίνηση είναι η $L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{\omega}{2} r^2\dot{\theta}$ όπου γράψαμε $\boxed{\omega = qB/m}$. Ο μετασχηματισμός $\theta \to \theta + \varepsilon$ είναι προφανώς συμμετρία και συνεπώς η γενικευμένη στροφορμή $p_\theta = r^2\left(\dot{\theta} + \frac{\omega}{2}\right)$ είναι σταθερά της κίνησης.

4δ) Για τις αρχικές συνθήκες που δίδονται η γενικευμένη στροφορμή είναι μηδενική συνεπώς σε όλους τους χρόνους θα είναι $\dot{\theta} = -\frac{\omega}{2}$, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου είναι σταθερή και με τις αρχικές συνθήκες που δίδονται θα είναι $\theta = -\frac{\omega}{2}t$. Επίσης η κίνηση θα παραμείνει επί του επιπέδου $z = 0$. Για τον προσδιορισμό της ακτινικής κίνησης γράφουμε την ακτινική εξίσωση κίνησης. Είναι: $\ddot{r} - r\dot{\theta}\left(\dot{\theta} + \omega\right) = 0$, και αντικαθιστώντας τη γνωστή τιμή της γωνιακής ταχύτητας καταλήγουμε στην εξίσωση $\ddot{r} + \frac{\omega^2}{4} r = 0$ η οποία έχει γενική λύση: $r = A\cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{2}t\right)$. Με τις αρχικές συνθήκες που δίδονται η λύση θα είναι $r(\theta) = 2R\cos\theta$ με $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ ούτως ώστε να είναι πάντοτε $r \ge 0$ (ελέγξτε ότι δεν υπάρχει πρόβλημα στο σημείο ασυνέχειας στο $\theta = -\pi/2$). Η τροχιά παρουσιάζεται στο σχήμα.




Η τροχιά είναι κύκλος ακτίνας $R$ όπως περιγράφεται από σημείο του κύκλου O. Το κέντρο όμως του κύκλου είναι μετατοπισμένο στο $K$. Αν περιγράφαμε τη κίνηση ως προς το κέντρο του κύκλου η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου θα ήταν όπως φαίνεται από το σχήμα $\dot{\phi} = 2\dot{\theta} = -\omega$ που δεν είναι άλλη από τη γνωστή κυκλοτρονική συχνότητα περιστροφής σε σταθερό μαγνητικό πεδίο.