ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική ΙΙ

7 Φεβρουαρίου 2012

Απαντήστε και στα 3 Προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις στα ερωτήματα εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α

Η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος είναι η

$$L = e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right),$$

όπου γ, m, k θετικές σταθερές.

(1) Πόσων βαθμών ελευθερίας είναι το παραπάνω σύστημα; Υπολογίστε την κανονική ορμή του συστήματος αυτού. Διατηρείται αυτή στην περίπτωση που $k = 0$;

(2) Γράψτε την εξίσωση κίνησης για το παραπάνω σύστημα και λύστε την σε γενική μορφή. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Λαγκρανζιανή αυτή;

(3) Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή του παραπάνω συστήματος.

(4) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις Χάμιλτον σε γενική μορφή.

(5) Ορίστε τις δύο ακόλουθες ποσότητες:

$$a = \frac{xe^{\gamma t} + m\dot{x}e^{\gamma t}}{\sqrt{2}} \qquad a^\star = \frac{xe^{\gamma t} - m\dot{x}e^{\gamma t}}{\sqrt{2}}.$$

Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{a, a^\star\}$. Είναι οι ποσότητες αυτές, $a, a^\star$, συζυγείς μεταβλητές; Ανακατασκευάστε μέσω αυτών τη Χαμιλτονιανή του συστήματος σε μια χρονοανεξάρτητη Χαμιλτονιανή της μορφής $H(a, a^\star)$.

ΘΕΜΑ Β

Ένα σύρμα παραβολικού σχήματος $z = ax^2$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω. Μια χάντρα μάζας m και αμελητέων διαστάσεων μπορεί να κινείται δίχως τριβές κατά μήκος του σύρματος, ενώ όλο το σύστημα βρίσκεται εντός του ομογενούς πεδίου βαρύτητας της Γης $\vec{g} = -g\hat{z}$.

(1) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή της χάντρας (χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες ρ, ϕ, z). Εξαρτάται η κίνηση της χάντρας από τη μάζα της;

(2) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και απλοποιήστε την επιλέγοντας γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\Omega^2 = 2ag$.

(3) Λύστε την παραπάνω διαφορική εξίσωση βρίσκοντας τη σχέση $\dot{\rho}(\rho)$ χωρίς να προχωρήσετε περαιτέρω. [Υπ: διαχωρίστε όλες τις παραγώγους του ρ από τις συναρτήσεις του ρ.]

(4) Δείξτε ότι το στοιχειώδες μήκος ενός απειροστού τόξου του σύρματος είναι $ds = \sqrt{1 + 4a^2\rho^2}d\rho$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση κίνησης ισοδυναμεί με $ds/dt =$σταθερό.

(5) Γράψτε το ολκλήρωμα της δράσης για το παραπάνω φυσικό σύστημα όταν $\Omega^2 = 2ag$ και δείξτε ότι είναι ακριβώς το ίδιο με αυτήν ενός ελεύθερου σωματιδίου που κινείται σε μια διάσταση αρκεί να κάνετε την αντικατάσταση: $ds = \sqrt{1 + 4a^2\rho^2}d\rho$, στη θέση της συντεταγμένης θέσης του ελεύθερου σωματιδίου.

ΘΕΜΑ Γ

Δύο σωματίδια ίδιας μάζας m μπορούν να κινούνται ελεύθερα πάνω σε δύο παράλληλα επίπεδα (το κάθε σωματίδιο στο ένα από τα δύο επίπεδα). Τα επίπεδα απέχουν απόσταση a και τα δύο σωματίδια συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σκληρότητας k και μηδενικού φυσικού μήκους. Βαρυτικό πεδίο **δεν** υπάρχει.

(1) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες (θεωρήστε τους άξονες $x - y$ παράλληλους με τα επίπεδα).

(2) Υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα.

(3) Ποια κίνηση των δύο σωματιδίων αντιστοιχεί στις δυο μηδενικές ιδιοσυχνότητες;

(4) Παρατηρούμε ότι το ένα από τα δύο σωματίδια εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Τι κίνηση κάνει τότε το άλλο;

(5) Βρείτε ένα συνεχή μετασχηματισμό ο οποίος να αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής του συστήματος. Ποια ποσότητα διατηρείται ως συνέπεια αυτής της συμμετρίας;

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

(1) 1 βαθμόυ ελευθερίας. $p = m\dot{x}e^{2\gamma t}$. Όταν λείπει ο όρος $kx^2/2$ η κανονική ορμή p διατηρείται, όχι όμως και η κλασική $m\dot{x}$.

(2) $m(\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + (k/m)x = 0$ με λύση

$$x(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\sqrt{\gamma^2-(k/m)t}} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-(k/m)t}}).$$

Πρόκειται για αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση.

(3)

$$H = \frac{p^2}{2m}e^{-2\gamma t} + \frac{kx^2}{2}e^{2\gamma t}.$$

(4)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}e^{-2\gamma t} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kxe^{2\gamma t}$$

Με μια επιπλέον παραγώγιση της πρώτης και χρήση της δεύτερης καταλήγουμε στην ίδια διαφορική εξίσωση με το (2). Η λύση για το p βρίσκεται με απλή παραγώγιση της $x(t)$.

(5) Πρώτα πρέπει να γραφεί η $\dot{x}$ ως συνάρτηση των x, p προκειμένου να υπολογιστεί η αγκύλη Poisson. Από το (1) $\dot{x} = (p/m)e^{-2\gamma t}$, οπότε

$$\{a, a^\star\} = \frac{1}{2}(\{xe^{\gamma t}, -pe^{-\gamma t}\} + \{pe^{-\gamma t}, xe^{\gamma t}\}) = -1$$

Επομένως πρόκειται για συζυγείς μεταβλητές (η αντίστροφη αγκύλη δίνει 1) που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν αντί των x, p. Λύνοντας ως προς x, p τις δύο ποσότητες βρίσκουμε $x = (1/\sqrt{2})(a + a^\star)e^{-\gamma t}$ και $p = (1/\sqrt{2})(a - a^\star)e^{\gamma t}$ οπότε

$$H = \frac{k}{4}(a + a^\star)^2 + \frac{1}{4m}(a - a^\star)^2.$$

ΘΕΜΑ Β

(1)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\Omega^2) - mgz = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2(1 + 4a^2\rho^2) + \rho^2\Omega^2) - mga\rho^2.$$

όχι δεν εξαρτάται αφού η μάζα είναι πολλαπλασιαστική σταθερά της L.

(2)

$$\ddot{\rho}(1 + 4a^2\rho^2) + 4a^2\rho\dot{\rho}^2 - (\Omega^2 - 2ga)\rho = 0.$$

Δηλαδή

$$\ddot{\rho}(1 + 4a^2\rho^2) + 4a^2\rho\dot{\rho}^2 = 0.$$

(3)

$$\frac{\ddot{\rho}}{\dot{\rho}} = \frac{-4a^2\rho}{1+4a^2\rho^2} \Rightarrow \frac{d\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{d(1+4a^2\rho^2)}{(1+4a^2\rho^2)}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση βρίσκουμε $\ln\dot{\rho} = -(1/2)\ln(1+4a^2\rho^2) + C$ δηλαδή $\dot{\rho}\sqrt{1+4a^2\rho^2}$ =σταθ.

(4) $ds = \sqrt{d\rho^2 + dz^2} = d\rho\sqrt{1+4a^2\rho^2}$. Έτσι η προηγούμενη διαφορική γίνεται ds/dt =σταθ.

(5)

$$S = \int L dt = \frac{m}{2}\int \dot{\rho}^2(1+4a^2\rho^2)dt = \frac{m}{2}\int (\frac{ds}{dt})^2 dt$$

που είναι η Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου.

ΘΕΜΑ Γ

$(dx_2/dt)^2 + (dy_2/dt)^2$

(1)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \cancel{\dot{x}_2^2\dot{y}_2^2}) - \frac{1}{2}k((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + a^2).$$

(2) $\omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{2k/m}$ με αντίστοιχα ιδιοανύσματα

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) Η ομαλή κίνηση των δύο σωμάτων κατά μήκος του x ή του y (ευρισκόμενα και τα 2 στην ίδια κατακόρυφη $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

(4) Αφού $x_1 = x_0 + R\cos(\omega t), y_1 = y_0 + R\sin(\omega t)$ δεν μπορεί παρά η συχνότητα αυτή να είναι η $\omega_3 = \omega_4$ και είναι διεγερμένες οι 3 και 4 ιδιοκαταστάσεις. Από τη μορφή τους συμπεραίνουμε ότι το άλλο σωματίδιο θα βρίσκεται στην κατοπτρική θέση $x_2 = x_0 - R\cos(\omega t), y_1 = y_0 - R\sin(\omega t)$ διαγράφοντας και αυτό κυκλική κίνηση με ίδια συχνοτητα.

(5) $x_1 \to x_1 + \epsilon, x_2 \to x_2 + \epsilon$ είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Διατηρείται η συνολική x ορμή $m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2$. Αντίστοιχα και για τις y συντεταγμένες και τη συνολική y ορμή.