



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II επί Πτυχίω 1 Απριλίου 2008

Απαντήστε στα 15 ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα. Καλή σας επιτυχία.

Σωματίδιο διέπεται από την Λαγκραντζιανή

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

όπου ω μία σταθερά.

1. Περιγράψτε ένα φυσικό σύστημα που να περιγράφεται από μια τέτοια δυναμική (γράψτε το πολύ δύο προτάσεις).
2. Ποια από τις δύο ποσότητες διατηρείται κατά την κίνηση, η $\dot{r}^2 - \omega^2 r^2$ ή η ίδια η Λαγκραντζιανή $\dot{r}^2 + \omega^2 r^2$; Εξηγήστε τον λόγο που διατηρείται αυτή που διατηρείται.
3. Αν η ποσότητα m έλειπε από την έκφραση της Λαγκραντζιανής, θα περιέγραφε η νέα Λαγκραντζιανή το ίδιο φυσικό σύστημα;
4. Ελέγξτε αν η ακόλουθη τροποποιημένη Λαγκραντζιανή

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r} + \omega r)^2$$

περιγράφει το ίδιο ή κάποιο διαφορετικό φυσικό σύστημα.

Στα ακόλουθα ερωτήματα ασχοληθείτε με την αρχική Λαγκραντζιανή.

5. Γράψτε την εξίσωση κίνησης και προσδιορίστε το σημείο ισορροπίας του σωματιδίου.
6. Αν το σωματίδιο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ **ακίνητο** στο σημείο $r = r_0$ ποια η εξέλιξη του σωματιδίου, και επιβεβαιώστε ότι η ποσότητα του ερωτήματος (2) πράγματι παραμένει σταθερά.
7. Υπολογίστε τη δράση για το χρονικό διάστημα T που αντιστοιχεί στη φυσική κίνηση που τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται ακίνητο στο σημείο στο σημείο $r = r_0$.
8. Στο πρόβλημα αυτό η φυσική διαδρομή καθιστά πάντοτε τη δράση ελάχιστη; Συγκρίνετέ τη με τη δράση στην οποία θα οδηγούσασταν αν η κίνηση περιγραφόταν από τη φυσική διαδρομή συν μια παρέκλιση (όχι κατ' ανάγκη μικρή) η οποία διατηρεί ανέπαφες την αρχική και την τελική θέση.
9. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στην παραπάνω Λαγκραντζιανή.
10. Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον.
11. Σχεδιάστε τις γραμμές ροής στο χώρο των φάσεων και με συντομία εξηγήστε τις κινήσεις που περιγράφονται στο σχήμα.

12. Ελέγξτε αν ο μετασχηματισμός $Q = (1/\sqrt{2m\omega})(p + m\omega r)$, $P = (1/\sqrt{m\omega})(p - m\omega r)$ είναι κανονικός (r, p είναι οι κανονικές συντεταγμένες στις οποίες είναι εκπεφρασμένη η παραπάνω Χαμιλτονιανή).
13. Ξαναγράψτε τη Χαμιλτονιανή στις νέες συντεταγμένες Q, P , καθώς επίσης και τις αντίστοιχες εξισώσεις Χάμιλτον με τις λύσεις τους.
14. Συζεύξτε τώρα το σωματίδιο αυτό με κάποιο άλλο ίδιο σωματίδιο με Λαγκρανζιανή:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}_1^2 + \omega^2 r_1^2 + \dot{r}_2^2 + \omega^2 r_2^2 - \sigma^2 (r_1 + r_2)^2)$$

και γράψτε τις αλγεβρικές εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι χαρακτηριστικές ιδιοκαταστάσεις του συστήματος.

15. Για ποιές τιμές του σ^2 μπορεί να έχουμε ταλαντώσεις;

Λύσεις

1. Ένα σωματίδιο που μπορεί να κινείται ελεύθερα πάνω σε μια περιστρεφόμενη με γωνιακή ταχύτητα ω ράβδο.

2. Η πρώτη η οποία είναι το ολοκλήρωμα του Jacobi.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (\dot{r}^2 - \omega^2 r^2) \right) = \frac{m}{2} (2\dot{r}\ddot{r} - 2\omega^2 r\dot{r}) = m\dot{r}(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0$$

όπως διαπιστώνει κανείς από την ακόλουθη εξίσωση κίνησης. Η άνωθεν διατήρηση οφείλεται στη συμμετρία της Λαγκρανζιανής σε μεταθέσεις χρονικές.

3. Όταν η Λαγκρανζιανή πολλ/στεί με μια σταθερά δεν αλλάζει το φυσικό περιεχόμενο της Λαγκρανζιανής. Εξάλλου οδηγεί στις ίδιες εξισώσεις κίνησης.
4. Ο επιπλέον όρος στο ανάπτυγμα της Λαγκρανζιανής $m\omega r\dot{r}$ είναι μια τέλεια χρονική παράγωγος (του $mr^2/2$) επομένως είναι απλώς μετασχηματισμός βαθμονόμησης που δεν αλλοιώνει το φυσικό νόημα.

- 5.

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial r} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m(\ddot{r} - \omega^2 r)$$

Για $r = 0, \dot{r} = 0$. Το σημείο αυτό είναι λοιπόν σημείο ισορροπίας.

6. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

η οποία με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες γίνεται

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega t).$$

- 7.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T L dt = \\ \frac{mr_0^2}{2} \int_0^T (\omega \sinh(\omega t))^2 + (\omega \cosh(\omega t))^2 dt &= \\ \frac{mr_0^2 \omega^2}{2} \int_0^T \cosh(2\omega t) dt &= \\ \frac{mr_0^2 \omega}{4} \sinh(2\omega T) \end{aligned}$$

8. Έστω ότι $\tilde{r}(t) = r(t) + \eta(t)$. Τότε

$$L(\tilde{r}, \dot{\tilde{r}}, t) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + 2\dot{r}\dot{\eta} + \dot{\eta}^2 + \omega^2(r^2 + 2r\eta + \eta^2))$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= S + \\ \frac{m}{2} \int_0^T dt (2r_0 \omega \sinh(\omega t) \dot{\eta} + 2r_0 \omega^2 \cosh(\omega t) \eta) + \\ \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{\eta}^2 + \omega^2 \eta^2) &= \\ S + mr_0 \omega \int_0^T dt \frac{d}{dt} (\eta \sinh(\omega t)) + \text{θετικός} &= \\ S + \text{θετικός} &\geq S \end{aligned}$$

με την ισότητα να ισχύει για $\eta(t) = 0$.

9.

$$p = m\dot{r} \Rightarrow H = p(p/m) - \frac{m}{2}((p/m)^2 + \omega^2 r^2) = \frac{1}{2m}(p^2 - (m\omega r)^2)$$

10.

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} = m\omega^2 r$$

11. Είναι οι γραμμές $p^2 - (m\omega r)^2 = C$. Πρόκειται για υπερβολές με άξονα συμμετρίας τον άξονα r για $C > 0$ και τον άξονα p για $C < 0$. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε μη δυνατότητα περάσματος από το σημείο $r = 0$ ενώ στη δεύτερη επρνά. Στην πρώτη περίπτωση ο αριστερός κλάδος της υπερβολής έχει $r \leq \sqrt{C}/(m\omega)$ ενώ ο δεξιός $r \geq \sqrt{C}/(m\omega)$ και η φορά ροής είναι αυτή των δεικτών του ρολογιού.

12. Ισχύει

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial r} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{2m\omega}(m\omega \cdot 1 - 1(-m\omega)) = 1$$

Επομένως είναι κανονικός.

13. Από τη μορφή της Χαμιλτονιανής $H = PQ\omega$, επομένως οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\dot{Q} = \omega Q, \quad \dot{P} = -\omega P$$

με λύσεις αντίστοιχα

$$Q = Q_0 e^{\omega t}, \quad P = P_0 e^{-\omega t}$$

14. (Η Λαγκρανζιανή αυτή θα μπορούσε να περιγράψει 2 ίδια σωματίδια στην ίδια περιστρεφόμενη ράβδο τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς $m\sigma^2$. Για να μπορεί να υπάρξει ισορροπία τα 2 σωματίδια πρέπει να βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου περιστροφής και σε ίση απόσταση.) Ο πίνακας της κινητικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{T} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ενώ ο πίνακας της δυναμικής είναι

$$\mathbf{V} = m \begin{pmatrix} -\omega^2 + \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -\omega^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

Ζητούμε λύσεις της $\det(\mathbf{V} - \Omega^2 \mathbf{T}) = 0$. Βρίσκουμε $\Omega^2 = -\omega^2$ και $\Omega^2 = 2\sigma^2 - \omega^2$ με αντίστοιχα χαρακτηριστικά ανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15. Ο πρώτος τρόπος ταλάντωσης είναι ασταθής. Ο δεύτερος είναι ευσταθής εφόσον $\sigma^2 > \omega^2/2$. Το ελατήριο θα πρέπει να είναι αρκετά σκληρό για να υπερκεράσει τη φυγόκεντρο.