



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ II 18 Ιουνίου 2018

Απαντήστε με προσοχή, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ Α Ένα σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μια διάσταση σε δυναμικό $V(x) = x^2/2$.

1. Να γραφεί η Λαγκραντζιανή του σωματιδίου, η εξίσωση Euler-Lagrange, και η λύση αυτής για αρχικές-τελικές συνθήκες $x(t_1 = 0) = A$ και $x(t_2 = 2\pi) = A$ (όπου A θετικός πραγματικός αριθμός). [5]
2. Να υπολογιστεί η τιμή της δράσης του σωματιδίου (επί της φυσικής διαδρομής) για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2\pi$. [5]
3. Θεωρήστε μια παρεκκλίνουσα διαδρομή η οποία ενώνει και πάλι το αρχικό με το τελικό σημείο με παρέκλιση $\varepsilon \sin(t/2)$. Είναι η παρέκλιση αυτή συμβατή με το αρχικό και τελικό σημείο του σωματιδίου; Γράψτε τη δράση που αντιστοιχεί στη διαδρομή αυτή στη μορφή $S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2$ και υπολογίστε τις τιμές των σταθερών S_0, S_1, S_2 . Συμφωνεί το αποτέλεσμα που βρήκατε με την αρχή ελάχιστης δράσης; [Δίδονται τα ολοκληρώματα: $\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x/2) + \cos(x) \sin(x/2)) dx = 0$ και $\int_0^{2\pi} \cos^2(x/2) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x/2) dx = \pi$.] [10]

ΘΕΜΑ Β Μια ομογενής κυκλική στεφάνη ακτίνας R και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον κατακόρυφο άξονά της. Η στεφάνη φέρει φορτίο Q ομογενώς κατανομημένο σε ολόκληρη την περιφέρειά της. Η στεφάνη βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο με αξονική συμμετρία γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z της στεφάνης, ενώ το κέντρο αυτής βρίσκεται στη θέση $z = a$. Έτσι το μαγνητικό πεδίο αυτό έχει τη μορφή: $\mathbf{B} = B_\rho(\rho, z)\hat{\rho} + B_z(\rho, z)\hat{z}$.

1. Να δείξετε ότι ένα ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\mathbf{A} = f(\rho, z)\hat{\phi}$ είναι ικανό να περιγράψει το παραπάνω μαγνητικό πεδίο. Ποιες διαφορικές εξισώσεις πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $f(\rho, z)$; [Ο στροβιλισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{K} = P\hat{\rho} + \Phi\hat{\phi} + Z\hat{z}$, όπου τα P, Φ, Z είναι όλα συναρτήσεις των ρ, ϕ, z , είναι [5]

$$\nabla \times \mathbf{K} = \nabla \times [P\hat{\rho} + \Phi\hat{\phi} + Z\hat{z}] = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & \rho\Phi & Z \end{vmatrix}.$$

2. Να γραφεί η Λαγκραντζιανή της στεφάνης η οποία μπορεί να περιστρέφεται εντός του παραπάνω μαγνητικού πεδίου. Να βρεθεί μετασχηματισμός συντεταγμένων που αποτελεί συμμετρία για τη Λαγκραντζιανή αυτή και στη συνέχεια να βρεθεί η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα. [5]
3. Υποθέστε τώρα ότι υπάρχει και μια δεύτερη ίδια στεφάνη με άξονα συμμετρίας πάλι τον άξονα z , της οποίας το κέντρο βρίσκεται στη θέση $z = 0$. Η περιστροφή της 2ης στεφάνης δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ που αισθάνεται η πρώτη. Το πεδίο αυτό, και επομένως και η ένταση του ανυσματικού πεδίου $f(\rho, z)$, είναι τώρα ανάλογα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της 2ης στεφάνης. Αν η 2η στεφάνη είναι εξαναγκασμένη να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = t$ και αρχικά ($t = 0$) η 1η στεφάνη ήταν ακίνητη, να βρεθεί αν θα αρχίσει να περιστρέφεται η 1η στεφάνη και σύμφωνα με ποιο νόμο. [5]

4. Τώρα και οι 2 στεφάνες είναι ελεύθερες να κινούνται η καθεμία στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί η άλλη. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί η καθεμία είναι ανάλογο με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής αυτής και στο μαγνητικό αυτό πεδίο κινείται η άλλη. Αφού κατασκευάσετε τη Λαγκραντζιανή του συστήματος των δύο περιστρεφόμενων στεφανών, δείξτε ότι οι 2 στεφάνες θα κινούνται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ανεξάρτητα η μια από την άλλη, χωρίς να αλληλοεπηρεάζονται οι κινήσεις τους. [10]

ΘΕΜΑ Γ Τρία σωματίδια μάζας $m_1 = 1, m_2 = \lambda, m_3 = 1$ βρίσκονται επί ευθείας και είναι συνδεδεμένα διαδοχικά μεταξύ τους και με αυτή τη σειρά με γραμμικά ελατήρια σταθεράς $k = 1$. Τα σωματίδια κινούνται επί της αρχικής ευθείας και τα ελατήρια έχουν μηδενικό φυσικό μήκος.

1. Γράψτε την κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει των θέσεων $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ των μαζών στην ευθεία. Στη συνέχεια γράψτε τους αντίστοιχους συμμετρικούς πίνακες της κινητικής, $\mathbf{M}$, και δυναμικής, $\mathbf{K}$, ενέργειας καθώς και τις εξισώσεις κίνησης υπό μορφή πινάκων. [5]

2. Προσδιορίστε τις κανονικές συχνότητες και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. Περιγράψτε τις φυσικές κινήσεις που αντιστοιχούν στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. [10]

3. Θεωρήστε την ειδική περίπτωση $\lambda = 2$. Δείξτε ότι οι τρεις κανονικές συχνότητες είναι οι $0, 1, \sqrt{2}$, ενώ οι αντίστοιχοι τρόποι ταλάντωσης είναι

$$\mathbf{X}^{(1)} = (1, 1, 1)^\top, \quad \mathbf{X}^{(2)} = (1, 0, -1)^\top, \quad \mathbf{X}^{(3)} = (1, -1, 1)^\top.$$

Αποδείξτε τις σχέσεις ορθογωνιότητας που ικανοποιούν οι τρεις τρόποι αυτοί ταλάντωσης ως προς τον πίνακα της κινητικής ενέργειας, $\mathbf{M}$, και προσδιορίστε τα γινόμενα $\mathbf{X}^{(i)\top} \mathbf{M} \mathbf{X}^{(i)}$ για $i = 1, 2, 3$. [5]

4. Για την περίπτωση $\lambda = 2$ και μέσω των σχέσεων ορθογωνιότητας που αποδείξατε, προσδιορίστε τις $x_1(t), x_2(t)$ και $x_3(t)$ αν αρχικά οι μάζες είναι **ακίνητες** στις θέσεις $x_1(0) = 2\varepsilon, x_2(0) = -\varepsilon, x_3(0) = 0$, όπου ε μια πραγματική σταθερά. [10]

ΘΕΜΑ Δ Κλασικό σωματίδιο μάζας $m = 1$ κινείται σε μία διάσταση x στο δυναμικό $V(x) = \frac{x^2}{2}$ όταν $|x| \leq a$ και $V(x) = \frac{a^2}{2}$ όταν $|x| > a$ ($a > 0$).

1. Γράψτε τη συνάρτηση Χάμιλτον, H , και τις εξισώσεις Χάμιλτον του σωματιδίου για όλες τις τιμές του x . [5]
2. Υπολογίστε τις αγγύλες Poisson $\{x, H\}, \{p, H\}, \{H, H\}$; Ποιο είναι το φυσικό περιεχόμενο των αγγυλών αυτών; [5]
3. Σχεδιάστε τη ροή στο χώρο των φάσεων για τιμή της H μικρότερη, ίση και μεγαλύτερη της $a^2/2$. [5]
4. Δείξτε ότι για $H = a^2/2$, υπάρχει σημείο του χώρου των φάσεων για το οποίο η εξέλιξη δεν είναι καλά ορισμένη (μπορεί να έχει διττή εξέλιξη). [5]
5. Σχεδιάστε τη θέση στο χώρο των φάσεων της τριάδας των σημείων A, B και C που αρχικά (για $t = 0$) βρίσκονταν στις θέσεις $(x_A(0) = 0, p_A(0) = a), (x_B(0) = 0, p_B(0) = \sqrt{2}a)$, και $(x_C(0) = 0, p_C(0) = 2a)$, στις χρονικές στιγμές $t_1 = \pi/6 \simeq 0.52, t_2 = \pi/4 \simeq 0.79$ και $t_3 = \pi/2 \simeq 1.57$. [5]

Λύσεις

A1: $L(x, \dot{x}) = (\dot{x}^2 - x^2)/2$. Euler-Lagrange: $\ddot{x} + x = 0$. Λύση που ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες: $x_c(t) = A \cos t + \beta \sin t$, για κάθε β . Οι συνοριακές αυτές συνθήκες δεν προσδιορίζουν μοναδικά τη φυσική διαδρομή.

A2: $S[x_c] = (1/2) \int_0^{2\pi} (\dot{x}_c^2 - x_c^2) dt = (1/2) \int_0^{2\pi} (A^2 - \beta^2)(\sin^2 t - \cos^2 t) dt = 0$.

A3: Για μεταβολή τροχιάς κατά $\varepsilon \eta$ με $\eta = \sin(t/2)$, που είναι κανονική παρέκλιση δεδομένου ότι δεν μεταβάλλει το αρχικό και τελικό χωροχρονικό γεγονός της δράσης, η δράση θα είναι $S[x_c + \varepsilon \eta] = (1/2) \int_0^{2\pi} [(\dot{x}_c + \varepsilon \dot{\eta})^2 - (x_c + \varepsilon \eta)^2] dt = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2$, όπου

$$S_0 = (1/2) \int_0^{2\pi} (\dot{x}_c^2 - x_c^2) dt = 0 ,$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{2\pi} (\dot{x}_c \dot{\eta} - x_c \eta) dt \\ &= -A \int_0^{2\pi} ((1/2) \sin t \cos(t/2) + \cos t \sin(t/2)) dt + \beta \int_0^{2\pi} ((1/2) \cos t \cos(t/2) - \sin t \sin(t/2)) dt \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Ο μηδενισμός της S_1 φαίνεται να είναι καταπληκτική συγκυρία. Αλλά δεν είναι, αποτυπώνει ότι η φυσική τροχιά $x_c(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange: $\ddot{x}_c + x_c = 0$ που είναι η απαίτηση για να καθιστά η φυσική τροχιά τη δράση στάσιμη σε μεταβολές που δεν μεταβάλουν το αρχικό και τελικό χωροχρονικό γεγονός. Τέλος:

$$S_2 = (1/2) \int_0^{2\pi} (\dot{\eta}^2 - \eta^2) dt = (1/2) \int_0^{2\pi} ((1/4) \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2)) dt = \pi/2(1/4 - 4/4) = -3\pi/8 < 0 .$$

Δηλαδή η δράση σε αυτές τις παραλλαγές γίνεται

$$S[x_c + \varepsilon \eta] = S[x_c] - 3\varepsilon^2 \pi/8$$

δηλαδή μειώνεται και συνεπώς η δράση στη φυσική τροχιά είναι μεν στάσιμη αλλά δεν είναι ελάχιστη.

B1: Είναι:

$$B_\rho = -\frac{\partial f}{\partial z} , \quad B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho f)}{\partial \rho} .$$

B2: $L(\phi, \dot{\phi}) = (1/2)MR^2\dot{\phi}^2 + QRf(R, a)\dot{\phi}$. Η Λαγκραντζιανή είναι αναλλοίωτη σε στροφές περί τον z στις οποίες οι γωνίες μετασχηματίζονται ως $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon$ και διατηρείται η στροφορμή του δίσκου:

$$p_\phi = MR^2\dot{\phi} + QRf(R, a) .$$

B3: Εφόσον διατηρείται η στροφορμή και η στροφορμή της στεφάνης ήταν μηδενική αρχικά θα πρέπει η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου να γίνει:

$$\dot{\phi} = -\frac{Qf(R, a)}{MR} t .$$

B4: Έστω $\dot{\phi}_1$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου στο $z = 0$ και $\dot{\phi}_2$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου που είναι στο $z = a$. Η Λαγκραντζιανή είναι:

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}_1^2 + QRf(R, 0)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_1 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}_2^2 + QRf(R, a)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$$

Για λόγους συμμετρίας είναι $f(R, a) = f(R, 0) = f$. Συνεπώς διατηρούνται οι

$$p_{\phi_1} = MR^2\dot{\phi}_1 + 2QRf\dot{\phi}_2, \quad p_{\phi_2} = MR^2\dot{\phi}_2 + 2QRf\dot{\phi}_1,$$

εκ των οποίων προκύπτει ότι οι γωνιακές ταχύτητες κάθε δίσκου είναι σταθερές που προσδιορίζονται εφ'άπαξ από τις αρχικές τιμές των γωνιακών ταχυτήτων.

Γ1: Η κινητική ενέργεια είναι:

$$\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{\lambda}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}$$

όπου $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$ και ο πίνακας κινητικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$$

και ο συμμετρικός πίνακας δυναμικής ενέργειας είναι

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{K}\mathbf{X}.$$

Γ2: Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}e^{i\omega t}$ και οι οι συχνότητες ω πρέπει να αποτελούν μη τετριμμένη λύση του γραμμικού συστήματος

$$(\omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{K})\hat{\mathbf{X}} = 0,$$

που απαιτεί

$$\det((\omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{K})) = 0,$$

δηλαδή

$$(\omega^2 - 1)((\lambda\omega^2 - 2)(\omega^2 - 1) - 2) = \omega^2(\omega^2 - 1)(\lambda\omega^2 - (2 + \lambda)) = 0.$$

οπότε η πρώτη είναι η μηδενική συχνότητα

$$\omega_1^2 = 0$$

με τρόπο ταλάντωσης

$$\mathbf{X}^1 = [1, 1, 1]^T$$

που αντιστοιχεί σε ελεύθερη κίνηση του κέντρου μάζας, η δεύτερη είναι η

$$\omega_2^2 = 1$$

με

$$\mathbf{X}^2 = [1, 0, -1]^T$$

και η τρίτη με

$$\omega_3^2 = (\lambda + 2)/\lambda ,$$

και

$$\mathbf{X}^3 = [1, -\lambda/2, 1]^T$$

Γ3: Είναι $\mathbf{X}^{1T}\mathbf{M}\mathbf{X}^1 = 4$, $\mathbf{X}^{2T}\mathbf{M}\mathbf{X}^2 = 2$ και $\mathbf{X}^{3T}\mathbf{M}\mathbf{X}^3 = 4$.

Γ4: Αναλύω την αρχική κατάσταση στη βάση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\mathbf{X}(0) = [2\varepsilon, -\varepsilon, 0]^T = \alpha\mathbf{X}^1 + \beta\mathbf{X}^2 + \gamma\mathbf{X}^3$$

Προσδιορίζω τους συντελεστες χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας. Π.χ. πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $\mathbf{X}^T\mathbf{M}$ προσδιορίζω ότι το α είναι:

$$\alpha = \frac{\mathbf{X}^{1T}\mathbf{M}\mathbf{X}(0)}{\mathbf{X}^{1T}\mathbf{M}\mathbf{X}^1} = 0 ,$$

ομοίως

$$\beta = \frac{\mathbf{X}^{2T}\mathbf{M}\mathbf{X}(0)}{\mathbf{X}^{2T}\mathbf{M}\mathbf{X}^2} = \varepsilon , \quad \gamma = \frac{\mathbf{X}^{3T}\mathbf{M}\mathbf{X}(0)}{\mathbf{X}^{3T}\mathbf{M}\mathbf{X}^3} = \varepsilon .$$

Πράγματι είναι:

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος δεδομένων των αρχικών συνθηκών θα είναι

$$\mathbf{X}(t) = \varepsilon \cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \cos(\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$x_1(t) = \varepsilon(\cos t + \cos(\sqrt{2}t)) , \quad x_2(t) = -\varepsilon \cos(\sqrt{2}t) , \quad x_3(t) = \varepsilon(-\cos t + \cos(\sqrt{2}t)) .$$

Δ1: $H = p^2/2 + V(x)$, Οι εξισώσεις Χάμιλτον:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{cases} -x & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Δ2:

$$\{x, H\} = \frac{1}{2}\{x, p^2\} = p \quad , \quad \{p, H\} = \{p, V(x)\} = -\frac{dV}{dx} \quad , \quad \{H, H\} = 0 \quad .$$

Αντιστοίχως οι αγγύλες είναι οι χρονικές παράγωγοι των x , p και H και ο μηδενισμός της τελευταίας υποδηλοί ότι διατηρείται κατά την κίνηση.

