



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής Εξέταση στη Μηχανική II 9 Ιουλίου 2010

Απαντήστε και στα 14 ερωτήματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α Δύο ίδια σωματίδια, το καθένα με φορτίο q και μάζα m , μπορούν να κινούνται δίχως τριβές σε μια ευθεία. Έστω x_1, x_2 οι μετατοπίσεις των δύο σωματιδίων-φορτίων από το σημείο ισορροπίας τους στην ευθεία. Τα δύο φορτία βρίσκονται σε μεταβαλλόμενο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο $E(t) = E \cos(\Omega t)$ (με $E = \text{σταθ}$) στη διεύθυνση της ευθείας. Τα δύο φορτία θεωρούμε ότι αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με το δυναμικό $m\omega^2(x_1 - x_2)^2/2$ (τα μαγνητικά πεδία που επάγεται η κίνηση των φορτίων είναι αμελητέα, ενώ τα ηλεκτρικά πεδία των φορτίων έχουν ήδη συμπεριληφθεί στο προαναφερθέν δυναμικό αλληλεπίδρασης).

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή που διέπει την κίνηση.
2. Διατηρείται η ενέργεια του συστήματος; Διατηρείται η ολική ορμή του συστήματος;
3. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων.
4. Σβήστε το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο (θέσατε $E = 0$) και προσδιορίστε τις ιδιοσυχνότητες και τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος.
5. “Ανάψτε” και πάλι το ηλεκτρικό πεδίο ($E \neq 0$) και θεωρήστε τώρα ότι τα σωματίδια κινούνται έτσι ώστε πάντα να είναι $x_1(t) = \alpha x(t), x_2(t) = \beta x(t)$ όπου α και β πραγματικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στα πλάτη των συντεταγμένων όταν το σύστημα ταλαντώνεται με κάποιον από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Δείξτε ότι μόνο ο ένας τρόπος ταλάντωσης είναι συμβατός με τέτοια κίνηση και προσδιορίστε τη δυναμική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του x αν το σύστημα κινείται με αυτόν τον τρόπο.
6. Για ποια συχνότητα Ω του εξωτερικού πεδίου επιτυγχάνεται συντονισμός; Πώς κινούνται τα 2 σωματίδια στην περίπτωση αυτή αν αρχικά είναι $x_1(0) = x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$;

ΘΕΜΑ Β Δίδεται η Χαμιλτονιανή:

$$H(q, p) = \omega \tau,$$

όπου $\tau = (q^2 + p^2)/2$ και ω πραγματικός αριθμός.

1. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. Σχεδιάστε τις τροχιές στο χώρο των φάσεων. Εξετάστε τι επίπτωση έχει το πρόσημο του ω στην κίνηση.
2. Κατασκευάστε την Λαγκρανζιανή που αντιστοιχεί σε αυτή τη Χαμιλτονιανή.
3. Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange και προσδιορίστε τη φυσική τροχιά $q_\phi(t)$ που συνδέει τα χωροχρονικά γεγονότα $[q_1 = 0, t_1 = 0]$ και $[q_2 = 0, t_2 = 2\pi/\omega]$. Είναι μονοσήμαντα ορισμένη αυτή;
4. Υπολογίστε τη δράση $S[q_\phi(t)]$ που αντιστοιχεί σε μια τέτοια φυσική τροχιά. [Δίδεται ότι $\cos^2 w - \sin^2 w = \cos 2w$.]
5. Θεωρήστε τώρα δύο παραλλαγμένες τροχιές τις

$$q_1(t) = q_\phi(t) + \epsilon \sin(2\omega t), \text{ και } q_2(t) = q_\phi(t) + \epsilon \sin(\omega t/2)$$

που όπως εύκολα μπορείτε να δείτε συνδέουν και πάλι τα ίδια χωροχρονικά σημεία. **Χωρίς** να κάνετε πράξεις υπολογίστε τις δράσεις $S_1 = S[q_1(t)]$ και $S_2 = S[q_2(t)]$ σε πρώτη τάξη ως προς ϵ .

6. Τώρα υπολογίστε τις S_1, S_2 ακριβώς, συμπεριλαμβάνοντας και τους όρους 2ης τάξης ως προς ϵ . Ποια τα συμπεράσματά σας όσον αφορά στο κατά πόσο η φυσική διαδρομή καθιστά τη δράση ελάχιστη; [Δίδονται τα ολοκληρώματα $\int_0^{2\pi} \cos^2(2x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(2x) dx = \pi$ και $\int_0^{2\pi} \cos^2(x/2) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x/2) dx = \pi$.]
7. Θεωρήστε τώρα μια επέκταση της προηγούμενης Χαμιλτονιανής, την

$$H(q, p) = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \cdots a_n \tau^n, \text{ όπου } \tau = (q^2 + p^2)/2$$

και a_i πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε τις αγκύλες Poisson $\{\tau, \tau^n\}$.

8. Με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα, δείξτε ότι το τ διατηρείται κατά την κίνηση.

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1. Η Λαγκραντζιανή

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + qE(t)x_1 + qE(t)x_2 - \frac{m\omega^2}{2}(x_1 - x_2)^2$$

2. Η ενέργεια δεν διατηρείται διότι η Λαγκραντζιανή εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, ούτε η ολική ορμή δεν διατηρείται διότι ο μετασχηματισμός $x_i \rightarrow x_i + \epsilon$ δεν αφήνει την Λαγκραντζιανή αναλλοίωτη. (Εύκολα φαίνεται όμως ότι ο μετασχηματισμός $x_i \rightarrow x_i + \epsilon$ είναι ημισυμμετρία και συνεπώς διατηρείται η ποσότητα $p_1 + p_2 - 2q \int^t E(\tau) d\tau = p_1 + p_2 + 2qE \sin \Omega t / \Omega$).

3. Οι εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = \frac{qE \cos \Omega t}{m}, \quad \ddot{x}_2 - \omega^2 x_1 + \omega^2 x_2 = \frac{qE \cos \Omega t}{m}$$

4. Συντονισμός πραγματοποιείται όταν το Ω είναι ίσο με μία από τις χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης. Οι χαρακτηριστικοί συχνότητες είναι $\Omega_1 = 0$ όταν το το ελατήριο δεν συμπιέζεται και ο τρόπος ταλάντωσης είναι $[1, 1]$ και ο δεύτερος τρόπος είναι ο $[1, -1]$ με συχνότητα $\Omega_2 = \sqrt{2}\omega$.

5. Ας θεωρήσουμε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$ που αντιστοιχεί στο δεύτερο τρόπο ταλάντωσης. Θέτοντας $x_1 = x$ και $x_2 = -x$ οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\ddot{x} + 2\omega^2 x = \frac{qE \cos \Omega t}{m}, \quad \ddot{x} + 2\omega^2 x = -\frac{qE \cos \Omega t}{m}$$

που δεν είναι συμβατές. Για το πρώτο όμως χαρακτηριστικό τρόπο $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ οπότε $x_1 = x = x_2$ και έχουμε

$$\ddot{x} = \frac{qE \cos \Omega t}{m}$$

και οι εξισώσεις είναι συμβατές και συνεπώς υπάρχει λύση αυτής της μορφής.

6. Η γενική λύση είναι:

$$x = A + Bt - \frac{qE \cos \Omega t}{\Omega^2 m}$$

και επειδή $x(0) = 0$ θα είναι

$$A = \frac{qE}{\Omega^2 m}$$

ενώ η αρχική συνθήκη $\dot{x}(0) = 0$ συνεπάγεται $B = 0$. Συνεπώς θα είναι

$$x_1(t) = x_2(t) = x(t) = \frac{q}{\Omega^2 m} (1 - \cos(\Omega t))$$

Για να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά όταν έχουμε συντονισμό λαμβάνουμε το όριο $\Omega \rightarrow 0$ στην παραπάνω κίνηση που επειδή $1 - \cos(\Omega t) = \Omega^2 t^2 / 2 + \mathcal{O}(\Omega^4)$ δίνει ότι στο συντονισμό και τα δύο σωματίδια κινούνται σύμφωνα με:

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{qEt^2}{2m}$$

ΘΕΜΑ Β

1. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\dot{q} = \omega p, \quad \dot{p} = -\omega q$$

Οι τροχιές είναι κύκλοι στο επίπεδο (q, p) με κέντρο την αρχή των αξόνων. Όταν $\omega > 0$ η τροχιά διαγράφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού και αντίθετα όταν $\omega < 0$.

2. Η Λαγκραντζιανή είναι

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}p - H(q, p)$$

στην οποία πρέπει να αντικατασταθεί το p μέσω του ορισμού $\dot{q} = \partial H / \partial p = \omega p$, άρα:

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2\omega} - \frac{\omega q^2}{2}.$$

3. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

οπότε οι φυσικές κινήσεις που ικανοποιούν τα δοσμένα χωροχρονικά γεγονότα είναι οι:

$$q_\phi = A \sin \omega t$$

για οποιοδήποτε A . Υπάρχει απειρία φυσικών λύσεων στην περίπτωση αυτή.

4. Η δράση είναι

$$\begin{aligned} S[q_\phi] &= \frac{A^2 \omega}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) dt \\ &= \frac{A^2 \omega}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \cos 2\omega t dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ολες οι φυσικές διαδρομές έχουν μηδενική δράση

5. Και σε πρώτη τάξη θα είναι η δράση μηδενική, διότι η φυσική τροχιά αποτελεί ακρότατο.
6. Σε δεύτερη τάξη, επειδή η Λαγκρανζιανή είναι τετραγωνικής μορφής, για τη διαδρομή $q = q_\phi + \epsilon\eta$, η δράση θα είναι

$$S[q] = 0 + \epsilon^2 \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{\dot{\eta}^2}{2\omega} - \frac{\omega\eta^2}{2} \right) dt$$

οπότε

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\epsilon^2\omega}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (4 \cos^2 2\omega t - \sin^2 2\omega t) dt \\ &= \frac{\epsilon^2\omega}{2} \left(\frac{4\pi}{\omega} - \frac{\pi}{\omega} \right) \\ &= \frac{3\epsilon^2\pi}{2} > 0 . \end{aligned}$$

Η δράση αυξάνει στις διαδρομές q_1 , ενώ

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{\epsilon^2\omega}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (\cos^2(\omega t/2)/4 - \sin^2(\omega t/2)) dt \\ &= -\frac{3\epsilon^2\omega}{2} \left(\frac{\pi}{4\omega} - \frac{\pi}{\omega} \right) \\ &= -\frac{3\epsilon^2\pi}{8} < 0 , \end{aligned}$$

οπότε η δράση μειώνεται για τις διαδρομές q_2 . Συνεπώς η φυσική τροχιά δεν αποτελεί ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο της δράσης, διότι υπάρχουν κατευθύνσεις που απομακρυνόμενοι από τη φυσική τροχιά η δράση μεγαλώνει ενώ άλλες στις οποίες μικραίνει. Συνεπώς η φυσική τροχιά αποτελεί σαγματικό σημείο.

7.

$$\begin{aligned} \{\tau, \tau^n\} &= \frac{\partial \tau}{\partial q} \frac{\partial \tau^n}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial p} \frac{\partial \tau^n}{\partial q} \\ &= n\tau^{n-1} \{\tau, \tau\} = 0 . \end{aligned}$$

8. Συνεπώς $\{\tau, H\} = 0$ και η τ διατηρείται κατά τη κίνηση.