



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου

Ιούνιος 2001

«αρμονία αφανής φανερός κρείττων»
(μια κρυφή συμμετρία είναι καλύτερη από μια φανερή)
Ηράκλειτος DK54

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα 1 (25 μονάδες)

Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα με μόνο μία λέξη ή τύπο, μη υπερβαίνοντας τη μία γραμμή.

- 1) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου στο τριδιάστατο χώρο.
- 2) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου.
- 3) Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange ενός γενικού συστήματος που περιγράφεται από μία μόνο γενικευμένη συντεταγμένη.
- 4) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή του παραπάνω γενικού συστήματος.
- 5) Γράψτε τις εξισώσεις Χάμιλτον του παραπάνω συστήματος.
- 6) Εάν αρχικά ένα ελεύθερο σωματίο μοναδιαίας μάζας βρισκόταν στην αρχή των καρτεσιανών αξόνων και μετά από μία μονάδα χρόνου στο $(1,0,0)$, πόση είναι η δράση που αντιστοιχεί στη φυσική διαδρομή;
- 7) Εάν x_i κάποια συντεταγμένη θέσης του σωματιδίου και p_j μια συντεταγμένη της γενικευμένης ορμής του σωματιδίου πόσο είναι η αγγύλη Poisson $\{x_i, p_j\}$;
- 8) Τι μορφή έχει το δυναμικό αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις Νευτώνειου τύπου;
- 9) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με δυνάμεις Νευτώνειου τύπου χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες τη θέση του κέντρου μάζας και τη σχετική θέση των δύο σωματιδίων.
- 10) Ένα αβαρές ελατήριο σταθεράς k συνδέει δύο μάζες μάζας m η κάθε μία. Ποια η συχνότητα ταλάντωσης των μαζών;
- 11) Ένα σωματίδιο κινείται υπό τη επίδραση της βαρυτικής έλξης ενός πλανήτη (θεωρήστε τον πλανήτη ακίνητο) που έχει σχήμα σφαιρικό. Γράψτε όλες τις διατηρούμενες ποσότητες.
- 12) Σε ένα σωματίδιο ασκείται μια δύναμη $\vec{F}(t)$. Γράψτε μία Λαγκρανζιανή που περιγράφει την κίνησή του.
- 13) Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μίας χορδής είναι $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_t^2 - \dot{q}_x^2)$, όπου $q(x,t)$ η εγκάρσια μετατόπιση της χορδής στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$ ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $q(\pm 1, t) = 0$ (q_t είναι η χρονική παράγωγος και q_x η χωρική παράγωγος). Γράψτε την έκφραση που δίνει τη δράση της χορδής και την εξίσωση κίνησης της χορδής.
- 14) Παρατηρούμε ότι η στροφορμή $\vec{L}$ ενός σώματος εξελίσσεται σύμφωνα με το νόμο: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{k} \times \vec{L}$, όπου $\vec{k}$ σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα. Σχεδιάστε τη τροχιά που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{L}$ και προσδιορίστε επακριβώς τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της τροχιάς του $\vec{L}$, αν η στροφορμή αρχικά ήταν $\vec{L}_0$, καθώς επίσης και την περίοδο αυτής, εφόσον η κίνηση είναι περιοδική.

15) Η ποσότητα $G(q, p)$ διατηρείται σε φυσικό σύστημα που διέπεται από τη Χαμιλτονιανή $H(q, p, t)$. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{G, H\}$.

Θέμα 2 (25 μονάδες)

α) Αναφέρατε το θεώρημα της Noether για ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.

β) Αποδείξτε το. (Θεωρήστε μόνο χωρικούς μετασχηματισμούς).

γ) Κατασκευάστε με προσοχή μια Λαγκρανζιανή που διέπει το σύστημα N αλληλεπιδρώντων σωματιδίων με Νευτώνειες δυνάμεις. Εξηγήστε γιατί η Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε στροφές και μεταθέσεις. Δείξτε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της Noether, ότι η αναλλοιότητα της Λαγκρανζιανής στις στροφές οδηγεί στη διατήρηση της ολικής στροφορμής.

Θέμα 3 (25 μονάδες)

Δύο σωματίδια, μάζας m το καθένα, κινούνται ελεύθερα πάνω σε μια άπειρη κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R . Τα δύο σωματίδια έλκονται με δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή σταθεράς k με αντίστοιχο φυσικό μήκος μηδέν. Δεν υπάρχει κανένα άλλο πεδίο δυνάμεων.

(α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος των δύο σωματιδίων.

(β) Δείξτε ότι όταν τα σωματίδια βρίσκονται σε αντιδιαμετρικά σημεία το σύστημα ισορροπεί. Γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή γύρω από αυτή την κατάσταση.

(γ) Υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος και τους αντίστοιχους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

(δ) Χαρακτηρίστε την ευστάθεια αυτού του σημείου ισορροπίας.

(ε) Κατασκευάστε τις πιο γενικές αρχικές συνθήκες που θα οδηγούσαν σε ταλαντωτική κίνηση το σύστημα.

(στ) Ποιες είναι οι διατηρήσιμες ποσότητες για ένα τέτοιο σύστημα ;

Θέμα 4 (25 μονάδες)

(α) Δείξτε ότι ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ μπορεί να προκύψει από το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης (η χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων θα διευκόλυνε την απόδειξη). Προσέξτε ότι η μορφή αυτή του ανυσματικού δυναμικού κατασκευάστηκε για τυχαία τοποθέτηση της αρχής των αξόνων.

(β) Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τη Λαγκρανζιανή φορτισμένου σωματιδίου μάζας m και φορτίου q σε ομογενές μαγνητικό πεδίο (φροντίστε να στρέψετε τον άξονα z παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο).

(γ) Παρατηρούμε ότι το σωματίδιο επιστρέφει στο αρχικό σημείο από το οποίο ξεκίνησε ύστερα από χρόνο T . Υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί σε μια επίπεδη κυκλική τροχιά η οποία διαγράφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα στο επίπεδο το κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Για ποια σχέση της περιόδου με τα q, B, m η τιμή της δράσης αυτής είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα της τροχιάς ;

(δ) Θεωρήστε στη συνέχεια μια τροχιά, παραπλήσια μιας από τις ανωτέρω κυκλικές τροχιές που διαγράφονται με την ιδιαίτερη γωνιακή ταχύτητα, ω_0

που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, και μάλιστα τέτοια τροχιά ώστε να ξεκινάει από το συγκεκριμένο αρχικό σημείο και να καταλήγει στο ίδιο μετά από χρόνο T . Μπορείτε να παραμετροποιήσετε την τροχιά ως ακολούθως: $r(t) = r_0 + \varepsilon f(t)$, $\theta(t) = \omega_0 t + \varepsilon g(t)$, $z(t) = z_0 + \varepsilon h(t)$, όπου ε πολύ μικρός αριθμός και $f(t), g(t), h(t)$ αυθαίρετες συναρτήσεις που ικανοποιούν συγκεκριμένες οριακές συνθήκες (ποιες;). Υπολογίστε τη δράση για τη νέα τροχιά σε πρώτη τάξη ως προς τον παράγοντα ε . Μπορείτε τώρα να αποφανθείτε ποια μπορεί να είναι η φυσική κίνηση;

(ε) Προκύπτει η τιμή της ακτίνας της φυσικής κίνησης από τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες; Τι πρέπει να γνωρίζετε για να την υπολογίσετε;