



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

**Τμήμα
Πέτρου Ιωάννου και Θεοχάρη Αποστολάτου**

Ιούνιος 2000

Απαντήστε και στα 4 θέματα. Καλή σας επιτυχία

Θέμα 1: (Α) Διατυπώστε το θεώρημα της Noether (όχι αυτό που αναφέρεται σε γενικούς μετασχηματισμούς συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου).

(Β) Δίδεται η Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H = p_1 p_2 + \omega^2 q_1 q_2$.

α) Γράψτε τις κανονικές εξισώσεις κίνησης του Χάμιλτον.

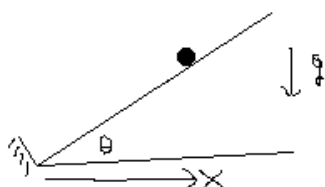
β) Υπολογίστε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτή τη Χαμιλτονιανή. Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange που διέπουν τη φυσική κίνηση. Δείξτε ότι είναι ισοδύναμες με τις κανονικές εξισώσεις. Περιγράψτε την κίνηση.

γ) Αποδείξτε ότι η Λαγκρανζιανή αυτή είναι συμμετρική στους μετασχηματισμούς

$$q_1 \rightarrow e^{-\epsilon} q_1, \quad q_2 \rightarrow e^{\epsilon} q_2.$$

δ) Ποια είναι η διατηρήσιμη ποσότητα που αντιστοιχεί σε αυτή τη συμμετρία;

Θέμα 2: Σωματίδιο μάζας, m , κινείται χωρίς τριβή στο σταθερό πεδίο βαρύτητας, επί κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ . Στο κάτω άκρο του κεκλιμένου επιπέδου υπάρχει τοίχος, στον οποίο όταν προσκρούσει το σωματίδιο ανακλάται ελαστικά. Η κίνηση του σωματιδίου είναι συνεπώς περιοδική και περιορίζεται στα $x \geq 0$ (βλ. σχήμα).



α) Γράψτε τη Χαμιλτονιανή $H(x, p, \theta)$ συνάρτηση που περιγράφει την κίνηση για $x > 0$ και συγκεκριμένη γωνία θ .

β) Σχεδιάστε την τροχιά του σωματιδίου στο χώρο των φάσεων.

γ) Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου αρχίζει να μεταβάλλεται αδιαβατικά. Διατηρείται η

ενέργεια του σωματιδίου τότε; Προσδιορίστε την ποσότητα που παραμένει αναλλοίωτη κατά την αδιαβατική αυτή μεταβολή της γωνίας του κεκλιμένου επιπέδου.

δ) Αν αρχικά η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου ήταν $\pi/6$ και αδιαβατικά γίνει $\pi/2$ πόσο μεγαλύτερο από το αρχικό θα είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάνει το σωματίδιο;

ε) Εξαρτάται το αποτέλεσμα από τον τρόπο που θα αλλάζουμε τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου;

Θέμα 3: Έστω η Λαγκρανζιανή συνάρτηση $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - 4\pi^2 q^2)$ ενός αρμονικού

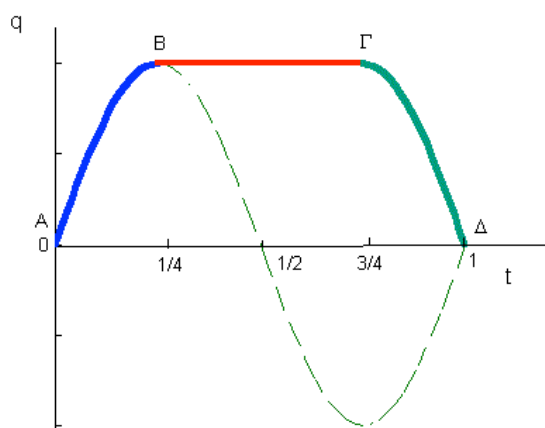
ταλαντωτή με περίοδο 1 χρονική μονάδα.

α) Διατυπώστε με προσοχή την αρχή της «ελάχιστης» δράσης.

β) Γράψτε την έκφραση που περιγράφει την ενέργεια του ταλαντωτή (το ολοκλήρωμα του Jacobi) και αποδείξτε ότι αυτή διατηρείται κατά τη φυσική κίνηση.

Υποθέστε τώρα ότι η φυσική τροχιά $q(t)$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $q(0) = q(1) = 0$.

γ) Υπολογίστε τη φυσική τροχιά. Είναι αυτή μοναδική; Αν γνωρίζετε την ενέργεια του ταλαντωτή μπορείτε να καθορίσετε μονοσήμαντα τη φυσική τροχιά; Ποια είναι αυτή;



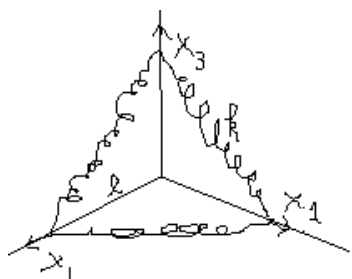
δ) Υπολογίστε τις δράσεις : $\int_0^1 L dt$,

$\int_0^{1/2} L dt$ για τη φυσική κίνηση που

προσδιορίζετε παραπάνω.

ε) Υπολογίστε τη δράση στη μη φυσική διαδρομή ΑΒΓΔ (βλ. σχήμα). Τι συμπεραίνεται; Μπορείτε να σκεφτείτε ένα ανάλογο γεωμετρικό παράδειγμα;

Θέμα 4: Τρία σώματα ίσης μάζας, m , που σημειώνονται με τους δείκτες $i = 1, 2, 3$ αναγκάζονται να κινούνται επί τριών συρμάτων, οι άξονες των οποίων είναι στο επίπεδο και σχηματίζουν στη κοινή αρχή τους γωνία 120° μεταξύ των (βλ. σχήμα). Τα



σώματα είναι συνδεδεμένα ανά δύο με γραμμικά ελατήρια σταθεράς k και φυσικού μήκους $l\sqrt{3}$. Αρχικά τα σώματα βρίσκονται σε ισορροπία σε απόσταση l από την αρχή των αξόνων. Η ισορροπία διαταράσσεται και τα σώματα εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας τους. Θεωρήστε ως συντεταγμένες που προσδιορίζουν τη θέση των σωμάτων την

απόσταση x_i εκάστου από το σημείο ισορροπίας του.

α) Προσδιορίστε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση $L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3)$ που διέπει μικρές κινήσεις των σωμάτων περί του σημείου ισορροπίας των και δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης και για τα τρία σώματα είναι $m\ddot{x}_i = -Ax_i - B(x_1 + x_2 + x_3)$.

Προσδιορίστε τα A και B .

β) Αποδείξτε ότι μία από τις κανονικές ταλαντώσεις είναι απόλυτα συμμετρική: $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t)$ και προσδιορίστε την ιδιοσυχνότητά της.

γ) Αποδείξτε ότι οι άλλες δύο κανονικές ταλαντώσεις έχουν κοινή ιδιοσυχνότητα (είναι εκφυλισμένες) και προσδιορίστε τη συχνότητα αυτή. Γράψτε ένα ζεύγος ιδιοσυναρτήσεων για τις δύο εκφυλισμένες ταλαντώσεις που τις καθιστά ορθογώνιες ανά πάσα στιγμή.

Υπόδειξη: Τα ερωτήματα (β) και (γ) μπορούν να απαντηθούν χωρίς τη χρήση των γενικών αναλυτικών μεθόδων για την εύρεση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

