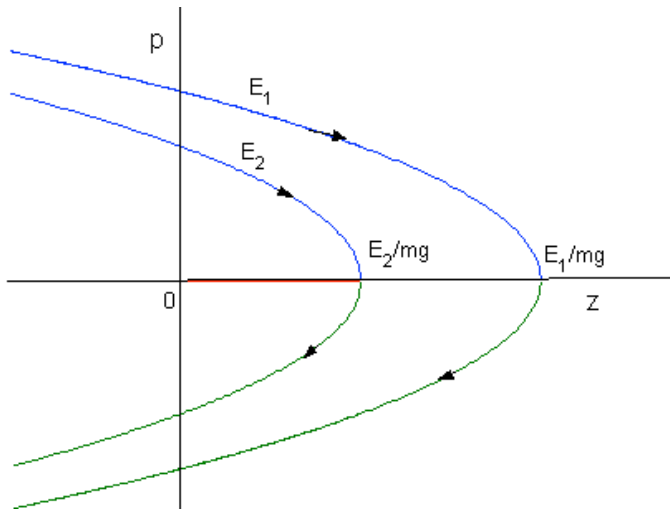


Απαντήσεις στο 3^ο και 4^ο ερώτημα του διαγωνίσματος Μηχ. II Ιουνίου 1999

ΘΕΜΑ 3

Η Λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι $L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$, η Χαμιλτονιανή συνάρτηση: $H(z, p) = \frac{p^2}{2m} + mgz$. Επειδή η Χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι ανεξάρτητη του χρόνου η κίνηση στο χώρο των φάσεων θα διαγράφει καμπύλη σταθεράς ενεργείας, δηλαδή



$\frac{p^2}{2m} + mgz = E$, η οποία είναι παραβολή. Η κίνηση στο χώρο των φάσεων φαίνεται στο σχήμα. Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί δύο ισοενεργειακές καμπύλες. Η τροχιά του σώματος ακολουθεί την παραβολή που αντιστοιχεί στη ενέργεια που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Η φορά της κίνησης φαίνεται στο σχήμα. Η κορυφή της

παραβολής αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος.

Οι εξισώσεις του Χάμιλτον είναι $\dot{p} = -mg$, $\dot{z} = p/m$. Η λύση είναι:

$$p(t) = -mgt + p(0), \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p(0)}{m}t + z(0).$$

Είναι εύκολο να δείτε από τη παραπάνω λύση ότι το παραλληλόγραμμο με κορυφές (p_0, z_0) , $(p_0 + \Delta p, z_0)$, $(p_0 + \Delta p, z_0 + \Delta z)$, $(p_0, z_0 + \Delta z)$ θα μετασχηματισθεί σε παραλληλόγραμμο για κάθε τιμή του t και για κάθε Δp και Δz (δεν χρειάζεται να είναι απειροστά).

Το $(z_0, p_0) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0}{m}t + z_0, -mgt + p_0 \right)$ ενώ το

$(z_0 + \Delta z, p_0) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0}{m}t + z_0 + \Delta z, -mgt + p_0 \right)$. Δηλαδή όλα τα σημεία της

πλευράς αυτής του αρχικού παραλληλογράμμου θα μεταφερθούν σε ένα παράλληλο

τμήμα μήκους Δz . Το $(z_0, p_0 + \Delta p) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}gt^2 + \frac{p_0}{m}t + z_0 + \frac{\Delta p}{m}t, -mgt + p_0 + \Delta p \right)$,

και η κορυφή αυτή θα έχει σχετικές συντεταγμένες ως προς το σημείο που θα βρεθεί

το (p_0, z_0) : $\left(\frac{\Delta p}{m}t, \Delta p \right)$. Το νέο παραλληλόγραμμο θα έχει δηλαδή βάση Δz και ύψος

Δp και εμβαδόν $\Delta z \Delta p$, όσο το αρχικό! Επιβεβαιώνεται δηλαδή το θεώρημα

Liouville.

Στη περίπτωση αυτή τα παραλληλόγραμμα παραμένουν παραλληλόγραμμα, αλλά συν το χρόνω γίνονται περισσότερο πλάγια. Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για γενικές Χαμιλτονιανές ροές.

ΘΕΜΑ 4

Η Λαγκρανζιανή είναι $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - (z - k\phi)V(r)$. Είναι αναλλοίωτη στον ελικοειδή συνεχή μετασχηματισμό $z \rightarrow z + k\varepsilon$, $\phi \rightarrow \phi + \varepsilon$. Ο μετασχηματισμός αυτός για $\varepsilon = 0$ είναι ταυτοτικός.

Από το θεώρημα της Noether θα διατηρείται η ποσότητα

$$p_{\phi} \frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} + p_z \frac{\partial z(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} = p_{\phi} + kp_z.$$

Επειδή $p_{\phi} = mr^2 \dot{\phi}$ (στροφορμή L_z περί τον άξονα z) και $p_z = m\dot{z}$ (ορμή κατά τη διεύθυνση z) θα διατηρείται η ποσότητα:

$$r^2 \dot{\phi} + k\dot{z} \quad \text{ή} \quad L_z + kp_z.$$

Η αρχική στροφορμή $p_{\phi}(0) = 0$ και η αρχική ορμή κατά τη διεύθυνση z είναι mu_{z0} .

Όταν $x = a, y = 0, z = b$, η ορμή κατά τη διεύθυνση z είναι μηδενική, ενώ η στροφορμή είναι man , όπου v η άγνωστη ταχύτητα στη διεύθυνση y . Συνεπώς από

τη διατήρηση της $L_z + kp_z$ πρέπει $v = \frac{k}{a} u_{z0}$.