

Κεφάλαιο 7

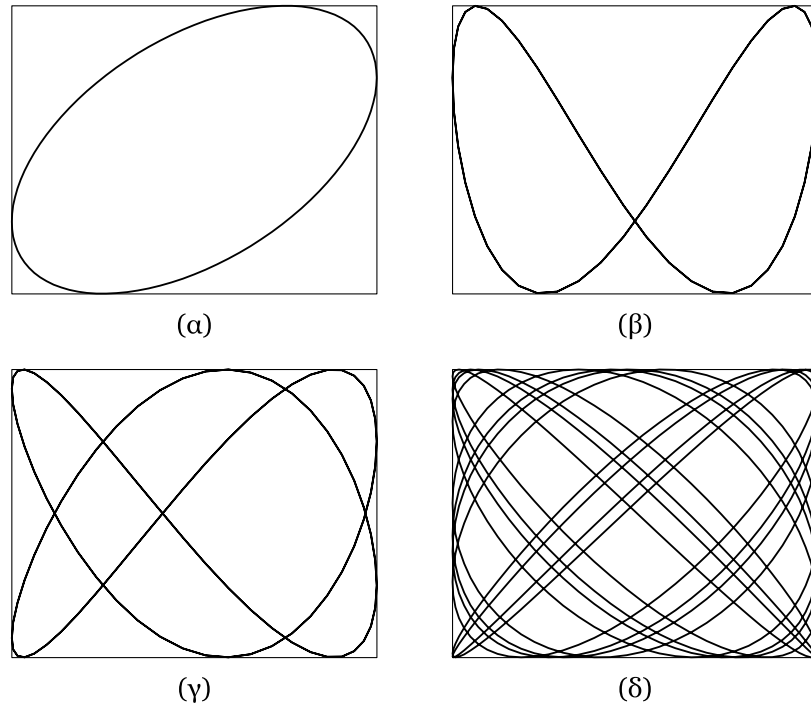
Παραδείγματα Λαγκρανζιανών Συναρτήσεων

*“Σκούπες σκουπάκια
ρουφηχτήρια φτερά τυναχτήρια
ξεσκονόπανα κουρελόπανα κλόουν
θόρυβοι και τρόποι ακροβάτες,
μαστίγιο πέφτουν οι κινήσεις
πάνω στην κατοικίδια σκόνη”*
Κική Δημουλά

Σε τούτο το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση για μια σειρά από πολύ διαφορετικά φυσικά μηχανικά συστήματα, από παιδικά παιχνίδια έως κοσμολογικά μοντέλα. Στόχος μας εδώ δεν είναι τόσο η επίδειξη της απλοποίησης και της γενίκευσης που προσφέρει ο λαγκρανζιανός φορμαλισμός –αυτό εξάλλου είναι ένα θέμα το οποίο έχουμε αναλύσει διεξοδικά σε προηγούμενα κεφάλαια– όσο η παρουσίαση των τεχνικών που χρησιμοποιεί κανείς για να κατασκευάσει λαγκρανζιανές συναρτήσεις σε πολύ ετερόκλητης προέλευσης συστήματα, καθώς επίσης και η ακόλουθη ανάλυση της εξέλιξης του συστήματος μέσω των εξισώσεων Euler - Lagrange. Εύκολα συνειδητοποιεί κανείς ότι η δυσκολία επίλυσης ενός μηχανικού προβλήματος εστιάζεται αποκλειστικά στη γραφή της σχετικής με αυτό Λαγκρανζιανής. Επιπλέον, κάποιες διατηρούμενες ποσότητες αναδεικνύονται άμεσα από τη μορφή της ίδιας της Λαγκρανζιανής και μπορούν να βοηθήσουν στην ευκολότερη εύρεση των εξισώσεων κίνησης.

7.1 Ισότροπος και ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής σε 2 διαστάσεις

Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση ελκτικής δύναμης ανάλογης με την απόσταση του σωματιδίου από κάποιο σημείο του χώρου. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το ελκτικό κέντρο η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου δίδεται από τη διαφορά μεταξύ



Σχήμα 7.1: (α) Η τροχιά ενός ισότροπου ταλαντωτή είναι ελλειπτική (εδώ $\omega = 1$ και $x = \cos t$, $y = \cos(t + \pi/3)$). (β) Η περιοδική τροχιά ανισότροπου ταλαντωτή με $\omega_x = 1$ και $\omega_y = 2$ ($x = \cos t$, $y = \cos(2t + \pi/3)$). (γ) Περιοδική τροχιά ανισότροπου ταλαντωτή με $\omega_x = 2$ και $\omega_y = 3$ ($x = \cos 2t$, $y = \cos(3t + \pi/3)$). (δ) Ψευδο-περιοδική τροχιά ανισότροπου ταλαντωτή με $\omega_x = 1$ και $\omega_y = (2)^{1/4}$ ($x = \cos t$, $y = \cos((2)^{1/4}t + \pi/3)$). Με την πάροδο του χρόνου η τροχιά θα καλύψει πυκνά όλα τα σημεία του ορθογωνίου.

της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2). \quad (7.1)$$

Η ισοτροπία του αρμονικού ταλαντωτή κρύβεται στον κοινό συντελεστή σκληρότητας k και στις δύο κατευθύνσεις x , y και η Λαγκρανζιανή αυτή αναφέρεται ως Λαγκρανζιανή ενός ισότροπου ταλαντωτή σε δύο διαστάσεις. Οι δύο εξισώσεις Euler - Lagrange είναι οι:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + ky = 0. \quad (7.2)$$

Εκτελούνται, δηλαδή, δύο ανεξάρτητες ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$x = A \cos(\omega t + \theta_0), \quad y = B \cos(\omega t + \phi_0).$$

Οι σταθερές A , B , θ_0 και ϕ_0 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η ισότητα των δύο συχνοτήτων που πηγάζει από την ισοτροπία του αρμονικού ταλαντωτή οδηγεί σε ελλειπτικές τροχιές στο επίπεδο (x, y) , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.1(α).

Ίσως, να φαινόταν πιο κατάλληλη η χρήση πολικών συντεταγμένων για την κατασκευή της Λαγκρανζιανής ενός τέτοιου συστήματος, αφού η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από την απόσταση r ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

και όχι από τη γωνία θ , όπως συμβαίνει με όλες τις κεντρικές δυνάμεις. Χρησιμοποιώντας το τέχνασμα του Landau που μάθαμε στο Κεφάλαιο 2, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2. \quad (7.3)$$

Η απουσία της συντεταγμένης θ από τη Λαγκρανζιανή σημαίνει αυτόματα τη διατήρηση της αντίστοιχης ορμής $\partial L/\partial\theta$ —στην προκειμένη περίπτωση της στροφορμής $mr^2\dot{\theta}$ —, αφού η εξίσωση Euler - Lagrange που αντιστοιχεί σε αυτή τη συντεταγμένη λαμβάνει την απλή μορφή

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (7.4)$$

Όσο για την ακτινική εξίσωση Euler - Lagrange αυτή είναι μια δύσκολα επιλύσιμη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + kr = 0,$$

η οποία απλοποιείται και λαμβάνει τη μορφή

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + kr = 0,$$

αν εκμεταλλευτούμε τη διατήρηση της στροφορμής $L = mr^2\dot{\theta}$. Η περίπλοκη μορφή της ακτινικής εξίσωσης οφείλεται στο γεγονός ότι είναι δύσκολη η περιγραφή μιας έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες με το κέντρο της έλλειψης να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει ότι η επιλογή του συστήματος συντεταγμένων μπορεί να καταστήσει την εύρεση της τροχιάς ενός φυσικού συστήματος ευκολότερη ή δυσκολότερη. Ταυτόχρονα, όμως, μπορεί να αναδείξει άμεσα κάποια συμμετρία του φυσικού συστήματος—εδώ τη μη εξάρτηση της Λαγκρανζιανής από τη γωνία θ —η οποία όπως είδαμε συνδέεται πάντοτε με μια διατηρούμενη ποσότητα—εδώ συγκεκριμένα με τη στροφορμή.

Αν ο αρμονικός ταλαντωτής ήταν *ανισότροπος*, δηλαδή αν η δυναμική ενέργεια είχε τη μορφή

$$V = \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2),$$

με $k_x \neq k_y$, τότε οι ταλαντώσεις στη διεύθυνση x και στη διεύθυνση y δεν θα εκτελούνταν με την ίδια συχνότητα, με αποτέλεσμα η τροχιά να μην είναι κατ' ανάγκην κλειστή. Αν ειδικά οι συχνότητες έχουν ρητό λόγο

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\kappa}{\lambda},$$

τότε ύστερα από λ περιόδους της y ταλάντωσης, που διαρκούν όσο ακριβώς κ περίοδοι της x ταλάντωσης, το σωματίδιο επανέρχεται στο αρχικό

σημείο. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά κλείνει και επαναλαμβάνεται ύστερα από χρονικό διάστημα ίσο με λ περιόδους της y ταλάντωσης (ή κ περιόδους της x ταλάντωσης). Πρόκειται για τις λεγόμενες *καμπύλες Lissajous*. Η κίνηση στην περίπτωση αυτή είναι περιοδική (βλ. Σχήμα 7.1β,γ).

Τέλος, αν οι συχνότητες έχουν άρρητο λόγο, η τροχιά δεν κλείνει και με την πάροδο του χρόνου το σωματίδιο θα περάσει σε οποδήποτε μικρή απόσταση από κάθε σημείο του ορθογώνιου παραλληλογράμμου οι διαστάσεις του οποίου καθορίζονται από τα πλάτη των δύο ανεξάρτητων ταλαντώσεων τα οποία με τη σειρά τους καθορίζονται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες (βλ. Σχήμα 7.1δ). Η τροχιά, λοιπόν, του σωματιδίου θα “σαρώσει” τελικά ολόκληρο αυτό το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση καλείται *ψευδο-περιοδική* (*quasi-periodic*).

7.2 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q , το οποίο κινείται μέσα σε ένα συνδυασμένο ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3,¹ έχει τη μορφή:

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + q\frac{\vec{A}}{c} \cdot \vec{v} - q\phi. \quad (7.5)$$

Στο ιδιαίτερο αυτό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που είναι στατικό, δηλαδή χρονοανεξάρτητο, το μεν βαθμωτό δυναμικό σχετίζεται αποκλειστικά με το ηλεκτρικό πεδίο ($-\vec{\nabla}\phi = \vec{E}$), ενώ το ανυσματικό δυναμικό με το μαγνητικό πεδίο ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι λόγω της ομογένειας των συγκεκριμένων πεδίων (τα πεδία είναι σταθερά σε ολόκληρο το χώρο), το βαθμωτό και το ανυσματικό δυναμικό μπορούν να γραφούν ως ακολούθως:

$$\phi = -\vec{E} \cdot \vec{x}, \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{x}. \quad (7.6)$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας, ας θέσουμε έναν από τους καρτεσιανούς άξονες,² για παράδειγμα τον άξονα z , παράλληλο με το μαγνητικό πεδίο, αφού το μαγνητικό πεδίο είναι αυτό που καθιστά πολύπλοκη την ανάλυση εξαιτίας του εξωτερικού γινομένου, και ας θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκεται στο επίπεδο $x-z$.

¹Σε τούτο το εδάφιο εμφανίζεται στη Λαγκρανζιανή του φορτισμένου σωματιδίου η ταχύτητα του φωτός c , σε αντίθεση με τη Λαγκρανζιανή που κατασκευάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Η διαφορά οφείλεται σε διαφορετικό σύστημα μονάδων που θεωρούμε στο παρόν πρόβλημα. Βλέπε σχετικά την αντίστοιχη υποσημείωση του Κεφαλαίου 3 (υποσημείωση 11).

²Δοκιμάστε άλλο σύστημα συντεταγμένων, όπως για παράδειγμα τις κυλινδροπολικές συντεταγμένες, για να πειστείτε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι καταλληλότερες για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού.

Με αυτές τις επιλογές η Λαγκρανζιανή του φορτισμένου σωματιδίου γράφεται

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qB}{2c}(-y\dot{x} + x\dot{y}) + q(E_x x + E_z z), \quad (7.7)$$

και οι εξισώσεις Euler - Lagrange διαμορφώνονται ως εξής:

$$m\ddot{x} = \frac{qB}{c}\dot{y} + qE_x \quad (7.8)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{qB}{c}\dot{x} \quad (7.9)$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \quad (7.10)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές δεν είναι άλλες από εκείνες που θα λαμβάναμε, αν γράφαμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και υπολογίζαμε τις συνιστώσες της δύναμης Lorentz. Εδώ οι εξισώσεις Euler - Lagrange προέκυψαν αβίαστα από την τυποποιημένη Λαγκρανζιανή του φορτισμένου σωματιδίου. Η επίλυση των εξισώσεων αυτών παρουσιάζει δυσκολία εξαιτίας του ότι οι δύο πρώτες είναι πεπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις. Η δυσκολία αυτή, όμως, μπορεί με κομψό τρόπο να αντιμετωπισθεί αν χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική συντεταγμένη

$$\zeta = x + iy.$$

Πράγματι, οι δύο πρώτες εξισώσεις συμπύσσονται σε μια μιγαδική διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{\zeta} = -i\frac{qB}{c}\dot{\zeta} + qE_x. \quad (7.11)$$

Αυτή είναι μία μη ομογενής, γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς τη ζ και ως εκ τούτου η λύση της είναι

$$\dot{\zeta} = V_{\zeta 0} e^{-iqBt/mc} - \frac{icE_x}{B}.$$

Με μια επιπλέον ολοκλήρωση η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{imcV_{\zeta 0}}{qB} (1 - e^{-iqBt/mc}) - \frac{icE_x}{B}t,$$

δηλαδή

$$x(t) = x_0 + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \frac{\beta}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad (7.12)$$

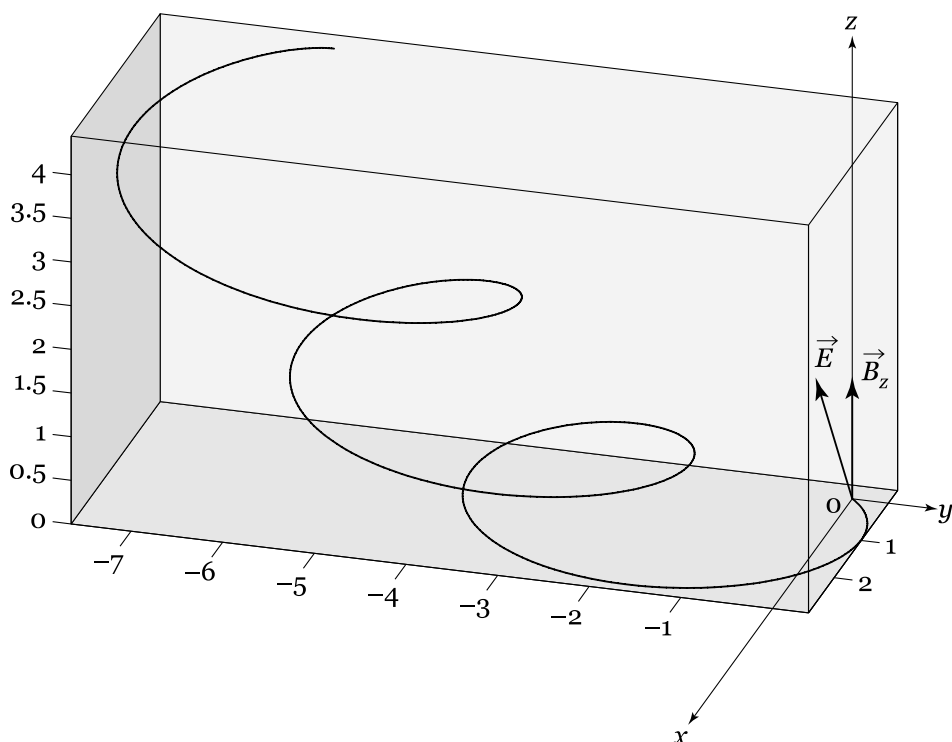
$$y(t) = y_0 + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t - \frac{\alpha}{\omega} (1 - \cos \omega t) - \frac{cE_x}{B}t, \quad (7.13)$$

όπου

$$\zeta_0 = x_0 + iy_0, \quad V_{\zeta 0} = \alpha + i\beta$$

και έχουμε ορίσει ως

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc},$$



Σχήμα 7.2: Η ελικοειδής κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε σταθερό μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται στη διεύθυνση z , ενώ το ηλεκτρικό πεδίο κείται στο επίπεδο $x - z$. Ενώ η ελικοειδής κίνηση του σωματιδίου αναπτύσσεται κατά μήκος του άξονα z με αυξανόμενο βήμα, η έλικα μετατοπίζεται κατά τη διεύθυνση $-y$ με σταθερή ταχύτητα.

την αποκαλούμενη *κυκλοτρονική συχνότητα*. Αν υπολογίσουμε τις σταθερές της ολοκλήρωσης α, β συναρτήσει των αρχικών ταχυτήτων u_{0x}, u_{0y} , η κίνηση στο επίπεδο $x - y$ είναι:

$$x(t) = x_0 + u_{0x} \frac{\sin \omega t}{\omega} + \left(u_{0y} + \frac{cE_x}{B} \right) \frac{1 - \cos \omega t}{\omega},$$

$$y(t) = y_0 + \left(u_{0y} + \frac{cE_x}{B} \right) \frac{\sin \omega t}{\omega} - u_{0x} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} - \frac{cE_x t}{B}.$$

Όσο για την κίνηση κατά τον άξονα z , αυτή υπολογίζεται εύκολα από την τρίτη εξίσωση Euler - Lagrange (7.10)

$$z(t) = z_0 + u_{0z} t + \frac{qE_z}{2m} t^2. \quad (7.14)$$

Η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου είναι αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 7.2. Είναι μια έλικα με αυξανόμενο βήμα κατά μήκος του άξονα z , η οποία συνεχώς μετατοπίζεται κατά την αρνητική κατεύθυνση του y άξονα, ο οποίος είναι ο άξονας ο κάθετος στο ηλεκτρικό πεδίο!

Αν και η λύση $x(t)$ με μια πρώτη ματιά φαίνεται λανθασμένη στο όριο που το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται –φυσιολογικά, αναμένουμε επιταχυνόμενη κίνηση–, λαμβάνοντας το όριο $B \rightarrow 0$, οπότε και $\omega \rightarrow 0$, και χρησιμοποιώντας το όριο

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$$

καταλήγουμε στην ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση που αναμένεται όταν απουσιάζει το μαγνητικό πεδίο

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + u_{0x}t + \frac{qE_x}{2m}t^2, \\y(t) &= y_0 + u_{0y}t, \\z(t) &= z_0 + u_{0z}t + \frac{qE_z}{2m}t^2.\end{aligned}$$

7.3 Ατμομηχανή

Στο εδάφιο αυτό θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε ένα απλοποιημένο μηχανικό ανάλογο μιας ατμομηχανής (βλ. Σχήμα 7.3). Γι' αυτό το λόγο θα θεωρήσουμε ότι η μάζα ολόκληρης της ατμομηχανής είναι M , ενώ τα μόνα κινητά μέρη αυτής είναι ο κινητήριος τροχός με ροπή αδράνειας I και το έμβολο, το οποίο συνδέεται με τον τροχό μέσω ενός διωστήρα. Τα τελευταία αυτά εξαρτήματα θα τα θεωρήσουμε αβαρή. Το έμβολο θα υποθέσουμε πως ωθείται με σταθερή δύναμη F (φάση εκτόνωσης), περιστρέφοντας τον τροχό κατά μισό κύκλο, και επιστρέφει χωρίς να ασκείται σε αυτό κάποια δύναμη (φάση συμπίεσης). Η απλουστευμένη αυτή περιγραφή αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της λειτουργίας των μηχανών εσωτερικής καύσης, όσον αφορά στο σκοπό μας. Η Λαγκρανζιανή της ατμομηχανής, λοιπόν, θα έχει τη μορφή³

$$L = \frac{1}{2}M(R\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + F(\phi)x(\phi). \quad (7.15)$$

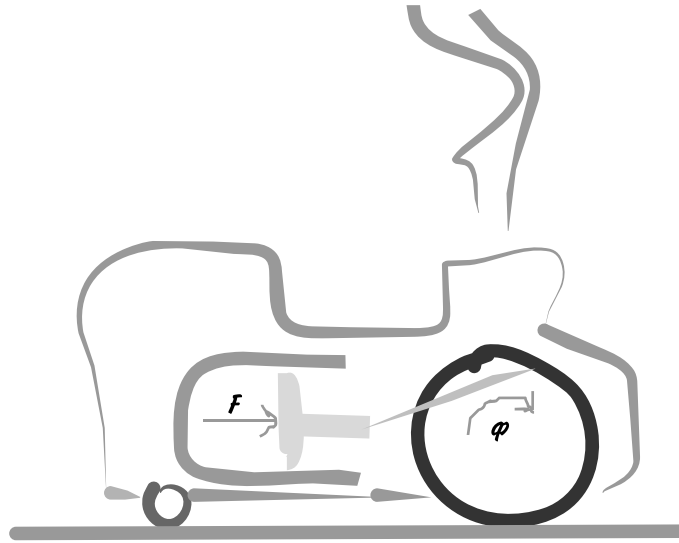
Η Λαγκρανζιανή που προκύπτει ορίζει ένα μηχανικό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, αφού η γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού είναι αρκετή για να περιγράψει πλήρως την κατάσταση της ατμομηχανής. Με απλή γεωμετρία μπορούμε να συσχετίσουμε τη διαδρομή x που διανύει το έμβολο με τη γωνία στροφής ϕ του κινητήριου τροχού. Έστω l το μήκος του διωστήρα –της ράβδου που μετατρέπει την παλινδρομική κίνηση του εμβόλου σε κυκλική μέσω της άρθρωσής του με τον τροχό– και R η ακτίνα του τροχού. Θεωρούμε ότι η άρθρωση του διωστήρα με τον τροχό βρίσκεται στην περιφέρεια του τροχού. Είναι εύκολο να δείξουμε τότε ότι

$$\begin{aligned}x + l \cos \omega + R \cos \phi &= \text{σταθερό}, \\l \sin \omega &= R \sin \phi,\end{aligned} \quad (7.16)$$

όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο διωστήρας με τον άξονα κίνησης του εμβόλου. Με μια μικρή ανακατανομή των όρων μπορούμε να γράψουμε το x ως

$$x = C - R \cos \phi - \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \phi}.$$

³Το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια του περιστρεφόμενου τροχού μπορεί να αναλυθεί στην κινητική ενέργεια της καθαρής μεταφορικής του κίνησης και της περιστροφικής του ενέργειας γύρω από το κέντρο μάζας του αποδεικνύεται εύκολα αν προσθέσουμε τις κινητικές ενέργειες όλων των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται ο τροχός.



Σχήμα 7.3: Η ατμομηχανή με τον κινητήριο μηχανισμό της (το έμβολο, το διωστήρα και τον κινητήριο τροχό)

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήθηκε η τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos \omega = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega}$, το πρόσημο της οποίας, όμως, δεν θα πρέπει να μας απασχολεί αφού η γωνία ω –θετική ή αρνητική– είναι πάντα μια οξεία γωνία. Τελικά, λοιπόν, η Λαγκρανζιανή λαμβάνει τη μορφή

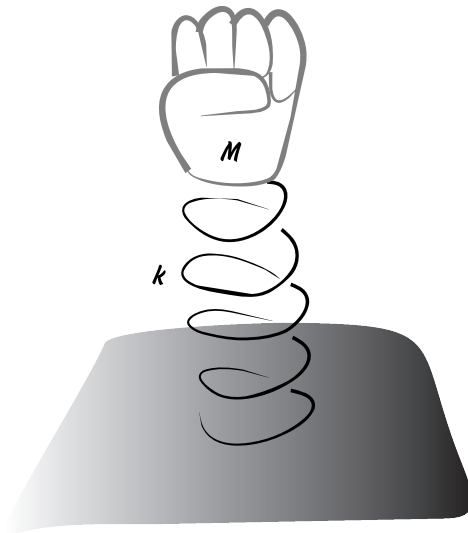
$$L = \frac{1}{2}(MR^2 + I)\dot{\phi}^2 - F\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \phi} - FR \cos \phi. \quad (7.17)$$

Προφανώς ο σταθερός όρος έχει απαλειφθεί από τη Λαγκρανζιανή, ενώ η εξίσωση κίνησης πρέπει να υπολογιστεί μόνο για γωνίες $0 \leq \phi \leq \pi$, αφού μόνο τότε δρα η δύναμη.⁴ Γράφοντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange καταλήγουμε στη σχέση

$$\ddot{\phi} = \frac{FR}{MR^2 + I} \left(1 + \frac{R \cos \phi}{\sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \phi}} \right) \sin \phi. \quad (7.18)$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε πως η διαφορική αυτή εξίσωση δεν είναι και τόσο χρήσιμη από πρακτικής άποψης, αφού πρέπει να λύσουμε τη δύσκολη αυτή διαφορική εξίσωση προκειμένου να δούμε πώς κινείται η ατμομηχανή με την πάροδο του χρόνου. Χρησιμότερο, από πρακτικής άποψης, θα ήταν να γνωρίζουμε την ταχύτητα που αποκτά η ατμομηχανή με κάθε περιστροφή του κινητήριου τροχού. Αυτό, όμως, είναι κάτι που εύκολα μπορούμε να μάθουμε από τη διατήρηση της ενέργειας. Ας μην ξεχνάμε ότι το σύστημα που μελετάμε είναι συντηρητικό,

⁴Θα μπορούσαμε τον περιορισμό αυτόν να τον εισαγάγουμε στη συναρτησιακή μορφή της δυναμικής ενέργειας, μέσω για παράδειγμα της συνάρτησης άλματος Θ , αλλά θα έπρεπε να είμαστε πολύ προσεκτικοί ώστε να μην δημιουργήσουμε ασυνέχειες στη δυναμική ενέργεια, οι οποίες θα οδηγούσαν σε άπειρες δυνάμεις. (Η συνάρτηση άλματος είναι $\Theta(x) = 1$ για $x > 0$ και $\Theta(x) = 0$ για $x < 0$.) Ο καλύτερος τρόπος για να επιτευχθεί αυτό στο εν λόγω πρόβλημα θα ήταν να αντικαταστήσουμε στη δυναμική ενέργεια τη γωνία ϕ με $\phi \Theta[\phi(\pi - \phi)] + \pi \Theta[\phi - \pi]$: αλλιώς, αν μηδενίζαμε τη δυναμική ενέργεια εκτός των ορίων $\phi = 0, \phi = \pi$, θα καταλήγαμε σε άπειρες δυνάμεις από την παραγωγή της δυναμικής ενέργειας στα σημεία αυτά.



Σχήμα 7.4: Η εκτινασσόμενη γροθιά.

γι' αυτό και καταφέραμε να κατασκευάσουμε άμεσα τη λαγκρανζιανή του συνάρτησης. Επομένως,

$$\frac{1}{2}(MR^2 + I)\dot{\phi}^2 - Fx = \text{σταθερό}$$

για κάθε μισό κύκλο, αφού στον υπόλοιπο μισό κύκλο η γωνιακή ταχύτητα δεν μεταβάλλεται λόγω του ότι η δύναμη F μηδενίζεται. Έτσι, ύστερα από N κύκλους η ταχύτητα που θα έχει αναπτύξει η ατμομηχανή θα είναι

$$u_N = R\dot{\phi}_N = \sqrt{\frac{4NFR^3}{MR^2 + I}}.$$

Στον υπολογισμό της ταχύτητας έχει ληφθεί υπόψη η συνολική διαδρομή του εμβόλου σε κάθε κύκλο, $x_{\text{ολ}} = 2R$.

7.4 Εκτινασσόμενη γροθιά

Μέσα σε ένα κουτί βρίσκεται μια πλαστική γροθιά στερεωμένη στο άκρο ενός συμπιεσμένου ελατηρίου (βλ. Σχήμα 7.4). Ο “τυχερός” παραλήπτης ενός τέτοιου δέματος, αν προλάβει να αποφύγει τη δραματική σύγκρουση της γροθιάς με το σαστισμένο του πρόσωπο, σίγουρα θα έδλεπε τη γροθιά να εκτινάσσεται στον αέρα συμπαρασύροντας ίσως και το κουτί. Παρακολουθώντας την κίνηση όλου του συστήματος, θα μπορούσε κανείς να καταλήξει σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα σχετικά με το βαθμό κακεντρέχειας του αποστολέα όσον αφορά στη σκληρότητα του ελατηρίου που επέλεξε και στην αρχική του συσπείρωση. Προσπαθώντας να κάνουμε ευκολότερο το πρόβλημα, χωρίς όμως να αλλάξουμε τη γενική δυναμική του, θα θεωρήσουμε ότι η γροθιά έχει μάζα M , ενώ το ελατήριο σκληρότητας k είναι αμελητέας μάζας, όπως επίσης και το κουτί. Ένα άλλο στοιχείο που είναι απαραίτητο για την ανάλυση του συστήματος είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου L_0 . Όταν το ελατήριο φτάνει σε αυτό

το μήκος, θα πάψει πια να επιμηκύνεται άλλο, ενώ το ελεύθερο άκρο του θα εγκαταλείψει στη συνέχεια το έδαφος. Θεωρώντας αποκλειστικά κινήσεις κατά μήκος του άξονα z , όπου το z μετρά τις αποστάσεις από το έδαφος, μπορούμε να γράψουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος ως

$$L = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz - \frac{1}{2}k(L_0 - z)^2\Theta(L_0 - z), \quad (7.19)$$

αφού για $z > L_0$ το ελατήριο διατηρεί το φυσικό του μήκος δίχως δυναμική ενέργεια και ανυψώνεται στον αέρα μαζί με τη γροθιά. Η εξίσωση κίνησης για ένα τέτοιο φυσικό σύστημα είναι

$$M\ddot{z} = -Mg + k(L_0 - z)\Theta(L_0 - z) + \frac{1}{2}k(L_0 - z)^2\delta(L_0 - z). \quad (7.20)$$

Η τελευταία δύναμη που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση προέκυψε από την παραγωγή της συνάρτησης Θ και ισούται με μηδέν, αφού η συνάρτηση $\delta(L_0 - z)$ πολλαπλασιάζει μια συνάρτηση, η οποία μηδενίζεται στο σημείο $z = L_0$ (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα). Έτσι, για παράδειγμα, αν ξεκινήσουμε με τη γροθιά ακίνητη και το ελατήριο συσπειρωμένο κατά s , το ελατήριο θα αποσυσπειρωθεί αρχικά σύμφωνα με την εξίσωση κίνησης

$$M\ddot{z} = -Mg + k(L_0 - z), \quad (7.21)$$

και στη συνέχεια, αφότου το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, η γροθιά θα συνεχίσει να κινείται σύμφωνα με την εξίσωση

$$M\ddot{z} = -Mg. \quad (7.22)$$

Με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες η εξίσωση (7.21) δίνει

$$z(t) = (L_0 - Mg/k) - (s - Mg/k) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right), \quad (7.23)$$

ενόσω $z < L_0$. Για να φτάσει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος θα πρέπει να ισχύει $s \geq 2Mg/k$, ειδάλλως η γροθιά θα ταλαντώνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας $z = L_0 - Mg/k$ και το ελατήριο δεν θα μπορέσει ποτέ να αποκτήσει το φυσικό του μήκος, συνθήκη η οποία απαιτείται για να αποδεσμευθεί η γροθιά από το έδαφος. Αν, όμως, $s \geq 2Mg/k$, στη συνέχεια η εξίσωση (7.22) δίνει ως λύση

$$z(t + t_0) = L_0 + st\sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{1 - \frac{2Mg}{sk}} - \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου t_0 είναι η χρονική στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος $z = L_0$. Η παραπάνω σχέση βασίστηκε στον υπολογισμό της ταχύτητας \dot{z} από τη σχέση (7.23) όταν $z = L_0$ και η οποία είναι ίση με

$$\dot{z}(t_0) = s\sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{1 - \frac{2Mg}{sk}}.$$



Σχήμα 7.5: Η ηλεκτρική σκούπα ενώ μαζεύει το καλώδιό της.

Επομένως, το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει η γροθιά είναι

$$H_{\max} = L_0 + s \left(\frac{sk}{2Mg} - 1 \right).$$

Πρόκειται για ένα αποτέλεσμα, το οποίο εύκολα θα μπορούσατε να επαληθεύσετε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, εφόσον φυσικά το κεφάλι σας βρίσκεται καθόλη την εξέλιξη του φαινομένου πιο ψηλά από το εν λόγω ύψος.

7.5 Ηλεκτρική σκούπα

Σε αυτό το παράδειγμα θα κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος μεταβλητής μάζας και συγκεκριμένα μιας αυτόματης ηλεκτρικής σκούπας που μαζεύει το καλώδιό της, το οποίο αρχικά βρίσκεται απλωμένο στο οριζόντιο δάπεδο (βλ. Σχήμα 7.5). Για λόγους ευκολίας θα υποθέσουμε ότι η κίνηση της σκούπας και του καλωδίου εκτελείται στην ευθεία του άξονα x . Έστω M η μάζα της σκούπας χωρίς το καλώδιο και $\mu = m/l$ η γραμμική πυκνότητα μάζας του καλωδίου. Αν ο μηχανισμός της σκούπας μαζεύει το καλώδιο σύμφωνα με το νόμο $y(t)$, τότε η κινητική ενέργεια της σκούπας, της οποίας η θέση καθορίζεται από τη συντεταγμένη x , είναι

$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2,$$

ενώ η κινητική ενέργεια του καλωδίου είναι

$$\frac{1}{2} \mu y(t) \dot{x}^2,$$

για το τμήμα του καλωδίου που έχει ήδη μαζευτεί στο εσωτερικό της σκούπας, αν θεωρήσουμε ότι το καλώδιο, αφότου μαζευτεί, μένει ακίνητο ως προς τη σκούπα. Τέλος, το τμήμα του καλωδίου που σέρνεται στο πίσω μέρος της σκούπας έχει κινητική ενέργεια

$$\frac{1}{2} \mu (l - y(t)) (\dot{x} + \dot{y})^2.$$

Το σύστημα σκούπας-καλωδίου δεν έχει δυναμική ενέργεια, αφού θεωρήσαμε ότι η κίνησή του πραγματοποιείται στο οριζόντιο επίπεδο και ότι ο νόμος που καθορίζει το μάζεμα του καλωδίου είναι δεδομένος. Αν ήθελε

κάποιος να κάνει τη λαγκρανζιανή περιγραφή πιο ρεαλιστική, θα έπρεπε ίσως να θεωρήσει ένα συγκεκριμένο μηχανισμό μαζέματος του καλωδίου, για παράδειγμα να θεωρήσει ένα καρούλι τυλίγματος συνδεδεμένο με περιστροφικό ελατήριο, οπότε το σύστημα θα είχε περισσότερους από ένα βαθμούς ελευθερίας και θα έπρεπε να συμπεριλάβει στη Λαγκρανζιανή και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και την περιστροφική ενέργεια του καρουλιού. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο αποφύγαμε να μιλήσουμε για "τύλιγμα" του καλωδίου και χρησιμοποιήσαμε τον όρο "μάζεμα".

Συνολικά, λοιπόν, η Λαγκρανζιανή της σκούπας μαζί με το καλώδιο είναι

$$L = \frac{1}{2} [M + \mu y(t)] \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \mu [l - y(t)] [\dot{x} + \dot{y}(t)]^2. \quad (7.24)$$

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange του συστήματος λαμβάνουν τη μορφή

$$\frac{d}{dt} [(M + \mu y)\dot{x} + \mu(l - y)(\dot{x} + \dot{y})] = 0. \quad (7.25)$$

Η διατηρούμενη ποσότητα εντός των αγκυλών είναι, προφανώς, η ορμή p του συστήματος. Έτσι,

$$\dot{x} = \frac{p - \mu(l - y)\dot{y}}{M + \mu l}. \quad (7.26)$$

Αν υποθέσουμε ότι αρχικά η σκούπα ήταν ακίνητη και ο νόμος που διέπει το μάζεμα του καλωδίου δίνεται από τη σχέση⁵

$$y(t) = l(1 - \cos \omega t),$$

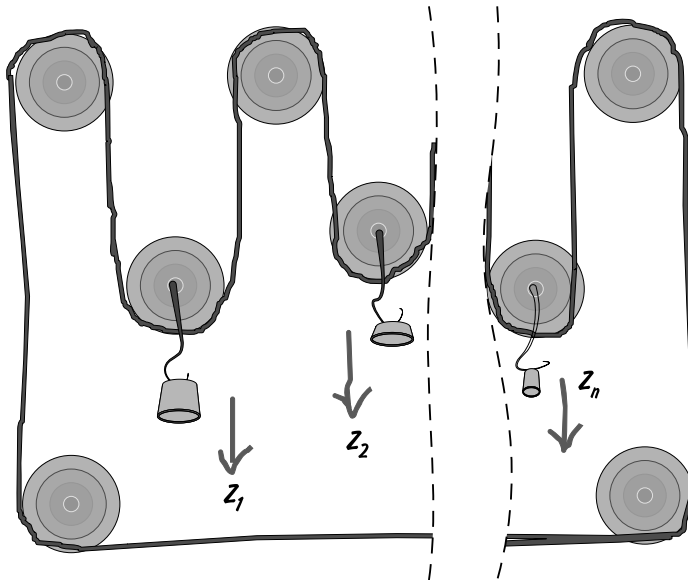
για χρόνους $t \leq \pi/2\omega$, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η σκούπα θα έχει κάθε στιγμή ταχύτητα

$$\dot{x} = -\frac{\mu l}{M + \mu l} \frac{l\omega}{2} \sin 2\omega t.$$

Η ταχύτητα αυτή μηδενίζεται στο τέλος της κίνησης (για $t = \pi/2\omega$), γεγονός το οποίο είναι αναμενόμενο εξαιτίας διατήρησης της ορμής του συστήματος. Αυτό που ίσως έρχεται σε αντίθεση με τη διαίσθησή μας είναι ότι η επιτάχυνση της σκούπας είναι αρνητική για $0 < t < \pi/4\omega$ και θετική για $\pi/4\omega < t < \pi/2\omega$. Από πού μπορεί να προέρχεται μια θετική επιτάχυνση; Δεν είναι η τάση του καλωδίου, καθώς αυτό μαζεύεται στο εσωτερικό της σκούπας, η μοναδική δύναμη που ασκείται στη σκούπα; Όχι. Στο εσωτερικό της σκούπας ασκείται επιπλέον μια δύναμη στη σκούπα προερχόμενη από το καλώδιο που ακινητοποιείται ως προς τη σκούπα, όπως θα συνέβαινε σε μια πλαστική κρούση. Στο δεύτερο μισό της κίνησης της σκούπας η δύναμη αυτή είναι μεγαλύτερη από την τάση, οπότε και η σκούπα επιβραδύνεται. Πόσο μήκος θα διανύσει συνολικά η σκούπα μέχρι να ακινητοποιηθεί; Εκτελώντας τους υπολογισμούς, είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$x_{ολ} = \frac{-\mu l^2}{2(M + \mu l)}.$$

⁵ Αν η κίνηση προέρχεται από κάποιο ελατήριο είναι αναμενόμενη μια τέτοια χρονική εξέλιξη.



Σχήμα 7.6: Το σύστημα των τροχαλιών του πολυανελκυστήρα.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι, μάλιστα, ανεξάρτητο από τον τρόπο με τον οποίο μαζεύεται το καλώδιο στο εσωτερικό της σκούπας και είναι αναμενόμενο, αφού το κέντρο μάζας του απομονωμένου συστήματος πρέπει να βρίσκεται στην ίδια θέση που βρισκόταν αρχικά, όντας αρχικά ακίνητο.

7.6 Πολυανελκυστήρας τύπου Atwood

Ας θεωρήσουμε $n + 1$ σταθερές αβαρείς τροχαλίες κρεμασμένες από την οροφή και άλλες n κινητές αβαρείς τροχαλίες που εναλλάσσονται με τις σταθερές τροχαλίες. Όλες οι τροχαλίες συνδέονται με ένα σχοινί, το οποίο κλείνει όπως στο Σχήμα 7.6. Έστω z_1, z_2, \dots, z_n οι κατακόρυφες θέσεις των βαριδιών m_1, m_2, \dots, m_n που κρέμονται από τις κινητές τροχαλίες με κατεύθυνση αυτή του σχήματος. Το σταθερό συνολικό μήκος του σχοινού υποχρεώνει τις συντεταγμένες του συστήματος να ικανοποιούν το δεσμό

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0,$$

αφού, όσο ανυψώνεται μια μάζα, πρέπει όλες οι άλλες να κατέρχονται αθροιστικά ακριβώς κατά το ίδιο διάστημα. Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι η

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{z}_1^2 + \dots + m_n \dot{z}_n^2) + g(m_1 z_1 + \dots + m_n z_n), \quad (7.27)$$

και αν, για παράδειγμα, αντικαταστήσουμε την z_n συντεταγμένη από την εξίσωση του συνδέσμου καταλήγουμε στη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} m_i \dot{z}_i^2 + \frac{1}{2} m_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \dot{z}_i \right)^2 + g \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_n) z_i.$$

Οι $n - 1$ εξισώσεις Euler - Lagrange του συστήματος μπορούν να γραφούν συνοπτικά υπό μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_n & m_n & \cdots & m_n \\ m_n & m_2 + m_n & \cdots & m_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & m_n & \cdots & m_{n-1} + m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 - m_n \\ m_2 - m_n \\ \vdots \\ m_{n-1} - m_n \end{pmatrix} g .$$

Πολλαπλασιάζοντας το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων με τον αντίστροφο του πρώτου πίνακα, υπολογίζουμε τις επιταχύνσεις των πρώτων $n - 1$ βαριδιών και κατόπιν, από την εξίσωση συνδέσμου υπολογίζουμε την επιτάχυνση και του τελευταίου βαριδιού.

Αν θέλαμε να προσδιορίσουμε την εξέλιξη του συστήματος καταφεύγοντας στους πολλαπλασιαστές Lagrange, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τη Λαγκρανζιανή άνευ συνδέσμου (7.27), αλλά στις n εξισώσεις Euler - Lagrange που θα προέκυπταν θα έπρεπε να αντικαταστήσουμε το 0, που συνήθως γράφουμε στο δεξιό μέλος, με τον κοινό πολλαπλασιαστή Lagrange του συνδέσμου, αφού

$$dz_1 + dz_2 + \dots + dz_n = 0 .$$

Για παράδειγμα, η i -οστή εξίσωση Euler - Lagrange θα είναι

$$m_i(\ddot{z}_i - g) = \lambda , \quad (7.28)$$

οπότε η επιτάχυνση του i -οστού βαριδιού θα είναι

$$\ddot{z}_i = g + \lambda/m_i .$$

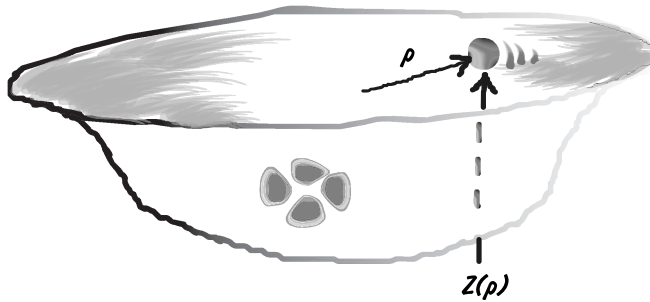
Αν, τώρα, προσθέσουμε όλες τις επιταχύνσεις, θα πρέπει από την εξίσωση του συνδέσμου να πάρουμε άθροισμα επιταχύνσεων μηδέν. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε το λ

$$\lambda = -ng\mu ,$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα όλων των βαριδιών. Σε αυτό το σημείο είμαστε πια σε θέση να υπολογίσουμε και την τάση του σχοιμιού, αφού, όπως έχουμε αναφέρει, το φυσικό νόημα των πολλαπλασιαστών Lagrange στο λαγκρανζιανό φορμαλισμό είναι η δύναμη που ασκείται προκειμένου να ικανοποιείται η εξίσωση του συνδέσμου. Η τάση, λοιπόν, αυτή σε κάθε πλευρά της κινητής τροχαλίας είναι $ng\mu/2$, ενώ το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η τάση αυτή που ασκείται σε κάθε κινητή τροχαλία έχει κατεύθυνση προς τα επάνω (αρνητική κατεύθυνση). Γνωρίζοντας την τιμή του λ , υπολογίζουμε στη συνέχεια κάθε επιτάχυνση χωριστά. Συγκεκριμένα

$$\ddot{z}_i = g \left(1 - \frac{n\mu}{m_i} \right) . \quad (7.29)$$

Στην περίπτωση που το σύστημα των τροχαλιών είναι αρχικά ακίνητο, οι μάζες, οι οποίες υπερβαίνουν την τιμή $n\mu$, θα αρχίσουν να κατευθύνονται προς τα κάτω, ενώ οι άλλες προς τα επάνω. Είναι σκόπιμο να επισημάνουμε το κέρδος που αποκομίσαμε με τη χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange όσον αφορά στο τεχνικό μέρος επίλυσης του προβλήματος,



Σχήμα 7.7: Ένα μπιζέλι στριφογυρίζει στο εσωτερικό μιας συμμετρικής γαβάθας. Θα περάσει ποτέ από τον άξονα περιστροφής του; Τι σχήμα πρέπει να έχει η γαβάθα για να μπορέσουμε να πετύχουμε κυκλικές τροχιές;

αφού η αντιστροφή του $(n - 1) \times (n - 1)$ πίνακα που εμφανίζεται στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που κατασκευάσαμε παραπάνω είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

7.7 Μπιζέλι σε γαβάθα

Ας περιγράψουμε την κίνηση ενός μπιζελιού στο εσωτερικό μιας αξονικά συμμετρικής γαβάθας. Έστω $z(\rho)$ το σχήμα της γαβάθας και κατά συνέπεια η εξίσωση συνδέσμου του μπιζελιού. Η Λαγκρανζιανή του μπιζελιού σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{1}{2}m \left[\rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2 \left(1 + \left(\frac{dz(\rho)}{d\rho} \right)^2 \right) \right] - mgz(\rho). \quad (7.30)$$

Προφανώς η μάζα του μπιζελιού, όντας πολλαπλασιαστική σταθερά της Λαγκρανζιανής, δεν παίζει κανένα ρόλο στην κίνησή του, όπως συμβαίνει πάντοτε με την κίνηση ενός σωματιδίου σε κάποιο βαρυντικό πεδίο. Οι εξισώσεις κίνησης όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος, δηλαδή δύο:

$$\begin{aligned} \rho^2 \dot{\phi} &= \text{σταθερό} = l, \\ \ddot{\rho}(z'^2 + 1) + \dot{\rho}^2 z' z'' - \frac{l^2}{\rho^3} + gz' &= 0. \end{aligned}$$

Ο τόνος στη δεύτερη διαφορική εξίσωση συμβολίζει παραγώγιση ως προς ρ . Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήθηκε η πρώτη. Η πρώτη σχέση υποδηλώνει τη διατήρηση της στροφορμής του μπιζελιού γύρω από τον άξονα z που εξασφαλίζει τη σταθερή φορά περιστροφής του μπιζελιού γύρω από τον άξονα συμμετρίας της γαβάθας και την αδυναμία του μπιζελιού να τον προσεγγίσει (όταν $l \neq 0$). Η δεύτερη εξίσωση είναι μια δύσκολη, μη γραμμική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την ακτινική μετακίνηση του μπιζελιού. Είναι δυνατόν πάντως να βρούμε τη λύση του προβλήματος για κυκλικές κινήσεις, δηλαδή για

$$\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0, \quad \rho = \rho_{\kappa} = \text{σταθερή}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η δεύτερη εξίσωση μετατρέπεται στην

$$\rho_{\kappa}^3 z'(\rho_{\kappa}) = \rho_{\kappa}^3 z'_{\kappa} = \frac{l^2}{g}. \quad (7.31)$$

Θα μπορούσαμε επιπλέον να υπολογίσουμε και κατά πόσον οι κυκλικές αυτές τροχιές είναι ευσταθείς. Γι' αυτόν το λόγο θα θεωρήσουμε μικρές διαταραχές γύρω από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, δίχως μεταβολή της στροφορμής l ,

$$\rho(t) = \rho_{\kappa} + \eta(t),$$

με $|\eta| \ll \rho_{\kappa}$ και κατόπιν θα αναπτύξουμε τη γενική εξίσωση της ακτινικής κίνησης σε πρώτη τάξη ως προς η γύρω από την κυκλική κίνηση. Η ακτινική εξίσωση, αν αγνοήσουμε τον πολύ μικρό όρο $\dot{\eta}^2$, αποκτά την ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{\eta}(1 + (z'_{\kappa})^2) + g \left(\frac{3z'_{\kappa}}{\rho_{\kappa}} + z''_{\kappa} \right) \eta = 0. \quad (7.32)$$

Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήθηκε η αναγκαία σχέση (7.31) την οποία πρέπει να ικανοποιεί η κυκλική τροχιά. Συνεπώς, η τροχιά θα είναι ευσταθής (ας θυμηθούμε τον αρμονικό ταλαντωτή), εφόσον

$$\frac{3z'_{\kappa}}{\rho_{\kappa}} + z''_{\kappa} > 0.$$

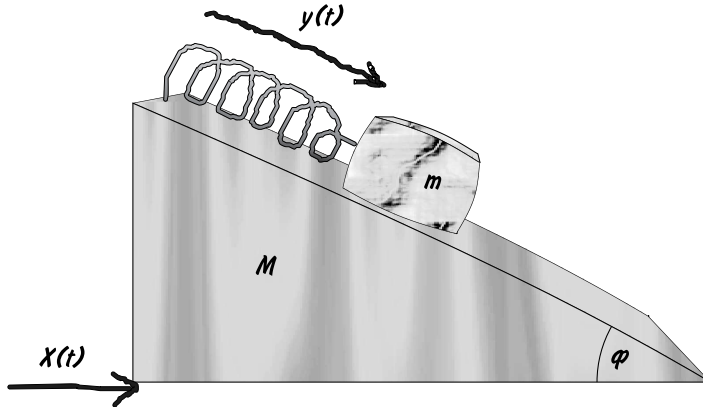
Στην περίπτωση που το σχήμα της γαδάθας έχει πολυωνυμική μορφή

$$z(\rho) \propto \rho^{\sigma},$$

είναι εμφανές ότι μόνο για $-2 < \sigma < 0$ θα έχουμε ασταθείς κυκλικές τροχιές, ενώ για κάθε άλλη τιμή του σ οι κυκλικές τροχιές θα είναι ευσταθείς και επομένως πραγματοποιήσιμες.

7.8 Bungee Jump σε τσουλήθρα

Έστω ένα σώμα μάζας m που ολισθαίνει χωρίς τριβή στη ράχη ενός κεκλιμένου επιπέδου μάζας M , το οποίο με τη σειρά του μπορεί να κινείται ελεύθερα σε οριζόντιο δάπεδο (βλ. Σχήμα 7.8). Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου είναι ϕ και το σώμα συγκρατείται στο επάνω μέρος του κεκλιμένου επιπέδου μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k . Τι κίνηση εκτελεί το σύστημα που περιγράψαμε παραπάνω; Η Λαγκρανζιανή του συστήματος περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια και του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου (μάλιστα, αυτή του σώματος είναι κάπως πιο πολύπλοκη, αφού το σώμα μετέχει στην κίνηση του κεκλιμένου επιπέδου), τη δυναμική ενέργεια του σώματος λόγω της κίνησής του στο βαρυτικό πεδίο και τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες του προβλήματος την οριζόντια μετακίνηση του κεκλιμένου επιπέδου $x(t)$ και την απόσταση του ολισθαίνοντος σώματος από το ανώτατο άκρο



Σχήμα 7.8: Ένα σώμα αγκιστρωμένο μέσω ενός ελατηρίου στο επάνω μέρος μιας τσουλήθρας ολισθαίνει επάνω σε αυτή. Η τσουλήθρα βρίσκεται σε παγοδρόμιο και μπορεί να κινείται ελεύθερα στο οριζόντιο επίπεδο. Τι κίνηση εκτελεί όλο το σύστημα;

του κεκλιμένου επιπέδου $y(t)$, υπολογίζουμε το τετράγωνο της ταχύτητας του ολισθαίνοντος σώματος

$$u_2^2 = (\dot{x} + \dot{y} \cos \phi)^2 + (\dot{y} \sin \phi)^2 .$$

Η Λαγκρανζιανή, λοιπόν, του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{x} + \dot{y} \cos \phi)^2 + \dot{y}^2 \sin^2 \phi] + mgy \sin \phi - \frac{1}{2} ky^2 .$$

Θεωρήσαμε για λόγους ευκολίας ότι το ελατήριο έχει μηδενικό φυσικό μήκος. Οι εξισώσεις κίνησης, λοιπόν, των δύο σωμάτων είναι

$$(M + m)\ddot{x} + m\ddot{y} \cos \phi = 0 , \quad (7.33)$$

$$m(\ddot{x} \cos \phi + \ddot{y}) - mg \sin \phi + ky = 0 . \quad (7.34)$$

Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις εκφράζει τη διατήρηση της ορμής στον άξονα x και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντικατασταθεί η τιμή του \ddot{x} στη δεύτερη εξίσωση. Έγστερα από την αντικατάσταση αυτή η δεύτερη εξίσωση ξαναγράφεται ως ακολούθως:

$$\left(\frac{m \cos^2 \phi}{M + m} + 1 \right) m\ddot{y} = -k \left(y - \frac{mg \sin \phi}{k} \right) . \quad (7.35)$$

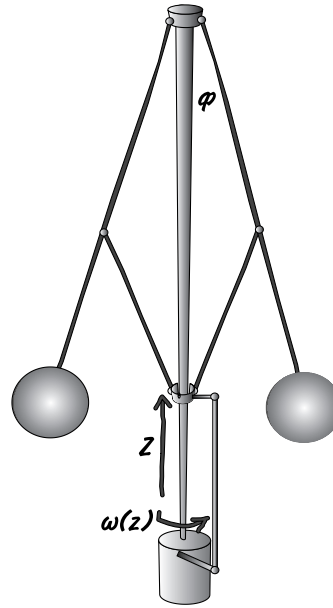
Η μορφή αυτή δόθηκε προκειμένου να διαφανεί η y συνιστώσα της κίνησης. Πρόκειται για ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας

$$y_0 = \frac{mg}{k} \sin \phi ,$$

με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{M + m}{M + m(1 + \cos^2 \phi)}} .$$

Αφού οι επιταχύνσεις του κεκλιμένου επιπέδου και του ολισθαίνοντος σώματος ως προς το κεκλιμένο επίπεδο είναι ανάλογες (βλ. σχέση (7.33)),



Σχήμα 7.9: Ο αυτόματος ρυθμιστής του Watt διατηρεί την ταχύτητα μιας μηχανής σταθερή.

το κεκλιμένο επίπεδο, αν εξαιρέσει κανείς μια πιθανή ομαλή κίνηση που θα μπορούσε να εκτελεί, αναμένεται να εκτελεί και αυτό οριζόντια ταλάντωση με την ίδια συχνότητα ω . Μπορούμε, μάλιστα, να εξετάσουμε τα δύο ακραία όρια των μαζών: (α) Αν $M \gg m$, τότε η (7.33) οδηγεί σε μηδενική επιτάχυνση \ddot{x} , οπότε το σώμα ταλαντώνεται επάνω στην τσουλήθρα με συχνότητα $\sqrt{k/m}$, όπως θα συνέβαινε, αν το κεκλιμένο επίπεδο ήταν πακτωμένο. (β) Αν $M \ll m$, τότε η οριζόντια θέση του ολισθαίνοντος σώματος $x + y \cos \phi$ έχει επιτάχυνση μηδενική (βλ. σχέση (7.33)), γεγονός το οποίο σημαίνει ότι, αν αρχικά όλα τα μέρη του συστήματος ήταν ακίνητα, το σώμα αυτό θα παρέμενε στην ίδια οριζόντια θέση, ενώ παράλληλα θα ταλαντωνόταν κατακόρυφα και αντίστοιχα το κεκλιμένο επίπεδο θα ταλαντωνόταν οριζόντια, ώστε τα δύο σώματα να βρίσκονται συνεχώς σε επαφή, με συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m(1 + \cos^2 \phi)}}.$$

Προφανώς, οι εξισώσεις κίνησης που παρουσιάσαμε παραπάνω έχουν ισχύ, εφόσον το ολισθαίνον σώμα δεν φτάσει σε αρνητικές y τιμές, δεν ξεπεράσει, δηλαδή, το επάνω άκρο του κεκλιμένου επιπέδου.

7.9 Ρυθμιστής μηχανής του Watt

Στα τέλη του 18ου αιώνα ο σκωτσέζος εφευρέτης και κατασκευαστής της ομώνυμης ατμομηχανής James Watt [1736-1819] επινόησε τον ακόλουθο μηχανισμό προκειμένου να διατηρείται σταθερή η ταχύτητα μιας μηχανής (βλ. Σχήμα 7.9). Δύο βαριές μεταλλικές σφαίρες στηριγμένες σε αρθρώσεις περιστρέφονται σύμφωνα με το ρυθμό περιστροφής της μηχανής.

Λόγω της περιστροφής τους οι σφαίρες αναγκάζονται να ανυψωθούν ρυθμίζοντας έτσι την παροχή καυσίμου στη μηχανή. Έστω ότι η μηχανή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Η ταχύτητα αυτή ρυθμίζεται από το ύψος z του δακτυλίου, το οποίο με τη σειρά του καθορίζεται από το ύψος στο οποίο ανυψώνονται λόγω φυγοκέντρου οι βραχίονες στο άκρο των οποίων είναι στερεωμένες οι μεταλλικές σφαίρες. Αν για κάποιο λόγο η ταχύτητα της μηχανής αυξηθεί, οι σφαίρες θα ανυψωθούν και μαζί τους θα ανυψωθεί και ο αρθρωτός δακτύλιος, υποχρεώνοντας τελικά τη μηχανή να ελαττώσει την ταχύτητά της. Η Λαγκρανζιανή του συστήματος που περιγράψαμε παραπάνω αποτελείται από την κινητική και τη δυναμική ενέργεια των σφαιρών. Μπορούμε, μάλιστα, να χρησιμοποιήσουμε τη γωνία ανύψωσης ϕ που σχηματίζουν οι βραχίονες με τον κατακόρυφο άξονα για να περιγράψουμε τη θέση των σφαιρών. Αν θεωρήσουμε ότι οι βραχίονες, στο άκρο των οποίων είναι στερεωμένες οι σφαίρες, έχουν μήκος l και ότι οι δεύτεροι βραχίονες που συνδέουν το μέσο των πρώτων βραχιόνων με τον δακτύλιο έχουν το μισό μήκος $l/2$, η Λαγκρανζιανή του συστήματος λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$L = \frac{1}{2}(2m)l^2(\dot{\phi}^2 + \omega^2 \sin^2 \phi) - 2mgl(1 - \cos \phi). \quad (7.36)$$

Η εξίσωση κίνησης των σφαιρών είναι

$$\ddot{\phi} = \sin \phi \left(\omega^2 \cos \phi - \frac{g}{l} \right). \quad (7.37)$$

Αν η συχνότητα περιστροφής των σφαιρών είναι αρκετά μικρή (μικρότερη από $\sqrt{g/l}$), η θέση $\phi = 0$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας, αφού η παραπάνω διαφορική εξίσωση μοιάζει με αυτή του αρμονικού ταλαντωτή για μικρά ϕ , και έτσι οι σφαίρες παραμένουν κολλημένες στον κατακόρυφο άξονα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διατηρούμε την ταχύτητα της μηχανής στη σταθερή τιμή ω_0 , η οποία ξεπερνά το όριο $\sqrt{g/l}$. Είναι προφανές ότι σε αυτή την περίπτωση η θέση $\phi = 0$ παύει να είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας και εμφανίζεται μια άλλη θέση ισορροπίας, η γωνία ϕ_0 , που αποτελεί ρίζα της εξίσωσης

$$\omega^2 \cos \phi - \frac{g}{l} = 0.$$

Αν αναπτύξουμε το δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης (7.37) γύρω από αυτό το σημείο ισορροπίας μπορούμε να αποδείξουμε ότι αυτό το νέο σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές. Αν μάλιστα ρυθμίσουμε την ταχύτητα περιστροφής ανάλογα με το πόσο ανυψώνονται οι σφαίρες, σύμφωνα με το νόμο

$$\omega = \omega_0 + \alpha(\cos \phi - \cos \phi_0),$$

με $\alpha > 0$, που συνεπάγεται ελάττωση της ταχύτητας, όταν η γωνία ϕ ξεπεράσει τη θέση ισορροπίας ϕ_0 , τότε η μηχανή θα λειτουργεί συνέχεια με σταθερή ταχύτητα. Μπορούμε, επιπλέον, να αποδείξουμε ότι στην περίπτωση αυτή η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων των σφαιρών γύρω από τη θέση ισορροπίας θα είναι ακόμη μεγαλύτερη απ' ό,τι αν η συχνότητα παρέμενε σταθερή. Τούτο είναι αναμενόμενο, αφού ο μηχανισμός

αυτορύθμισης της ταχύτητας κατασκευάστηκε για να προκαλεί ανάδραση. Έτσι, σε κάθε μεταβολή της ταχύτητας περιστροφής, οποιουδήποτε είδους τριβή στις αρθρώσεις σταθεροποιεί ταχύτερα το σύστημα στη θέση ισορροπίας.⁶

7.10 Κοσμολογία σε ένα κλειστό, μονοδιάστατο και σχεδόν ομογενές Σύμπαν

Ας υποθέσουμε ότι ο κόσμος είναι μονοδιάστατος και μάλιστα πεπερασμένος. Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε έναν τέτοιο κόσμο έχοντας κατά νου την τοπολογία ενός δακτυλίου. Αν συμπληρώναμε το γεωμετρικό αυτό υπόβαθρο με μάζες, οι οποίες θα έπαιζαν το ρόλο των γαλαξιών αυτού του κόσμου και θα αλληλεπιδρούσαν βαρυτικά μεταξύ τους, θα είχαμε ένα κοσμολογικό μοντέλο που θα περιέγραφε τον υποθετικό αυτό κόσμο. Θέλουμε να ελέγξουμε πώς θα εξελισσόταν μια ομοιόμορφη κατανομή μαζών κατά μήκος του δακτυλίου σε ένα τέτοιο Σύμπαν. Η βαρυτική δύναμη σε ένα μονοδιάστατο κόσμο –όπως συμβαίνει και με την ελκτική δύναμη μεταξύ δύο φορτισμένων άπειρων πλακών ενός πυκνωτή η οποία είναι ανεξάρτητη της απόστασης αυτών– αποδεικνύεται ότι είναι σταθερή και ανεξάρτητη από την απόσταση μεταξύ των σωμάτων. Συνεπώς, το αντίστοιχο της νευτώνειας βαρυτικής έλξης δύο μαζών σε ένα μονοδιάστατο κόσμο θα είναι

$$F_{1 \rightarrow 2} = -Gm_1m_2 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|}.$$

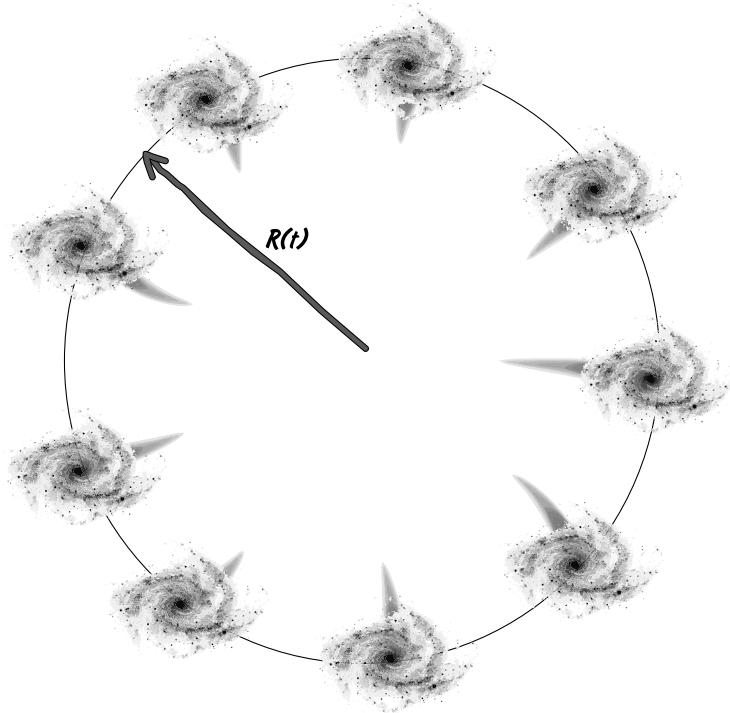
Γεννάται, βέβαια, το ερώτημα τι συμβαίνει όταν η μία διάσταση παρουσιάζει περιοδικές συνθήκες. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λάβουμε τη δύναμη ακριβώς όπως παραπάνω, μετρώντας τις αποστάσεις μεταξύ όλων των μαζών· δεξιόστροφα όμως ή αριστερόστροφα; Θα επιλέξουμε εκείνη τη φορά κατά την οποία η απόσταση μεταξύ των δύο μαζών είναι ελάχιστη.⁷ Η δυναμική, λοιπόν, ενέργεια ενός ζεύγους σωματιδίων, οι θέσεις των οποίων σε αυτό τον κόσμο καθορίζονται από τις γωνίες θ_i, θ_j , θα έχει τη μορφή

$$V_{ij}(\theta_i, \theta_j) = G^{(10)}m_i m_j R \left(\min_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} |\theta_i - \theta_j - 2n\pi| \right), \quad (7.38)$$

όπου ο συμβολισμός $G^{(10)}$ αναφέρεται στη σταθερά της βαρύτητας στο μονοδιάστατο κλειστό Σύμπαν και R είναι η ακτίνα του δακτυλίου. Είναι

⁶Αν, βέβαια, η τριβή είναι ανάλογη με την ταχύτητα κίνησης, ο χρόνος απόσβεσης, όπως γνωρίζουμε από την περίπτωση του ταλαντωτή με απόσβεση, δεν θα εξαρτάται από τη συχνότητα της ταλάντωσης.

⁷Για ενεργειακούς λόγους θα πρέπει να επιλεγεί εκείνη η φορά που οδηγεί στη μικρότερη δυνατή συνολική δυναμική ενέργεια του πεδίου και επομένως, αφού η δύναμη είναι σταθερή, η έκταση ισχύος της δύναμης πρέπει να είναι η μικρότερη δυνατή, δηλαδή η κοντινότερη απόσταση μεταξύ αυτών. Ευχαριστούμε τον Φ. Χατζηϊωάννου για την επισήμανση αυτή.



Σχήμα 7.10: Το μονοδιάστατο Σύμπαν με τους γαλαξίες του.

εύκολο να διαπιστώσουμε ότι πράγματι η δυναμική ενέργεια της σχέσης (7.38) δημιουργεί μεταξύ δύο μαζών μια ελκτική δύναμη με σταθερό μέτρο και φορά αυτήν του κοντινότερου τόξου που συνδέει τις δύο μάζες, ανεξαρτήτως των πολλαπλασίων του 2π που πιθανώς εμπεριέχονται στη μέτρηση της κάθε γωνίας.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι γεμίζουμε ολόκληρο το δακτυλιοειδές Σύμπαν με ίσες μάζες ομοιόμορφα κατανεμημένες, έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα κανονικό N -γώνο. Λόγω της κανονικότητας του N -γώνου οι μάζες θα ισορροπούν στην αρχική τους θέση. Αν, μάλιστα, σας προβληματίζει η ευστάθειά τους, υποθέστε ότι ο N είναι περιττός αριθμός, οπότε, επειδή η δύναμη είναι σταθερή και υπάρχει ίσος αριθμός μαζών στα αριστερά και στα δεξιά της κάθε μάζας, θα ασκείται σε κάθε μάζα μηδενική συνολική δύναμη. Επιπλέον, ακόμη και αν μετακινήσουμε ελαφρώς (λιγότερο από $2\pi/N$) τις μάζες από τη θέση ισορροπίας τους, αυτές θα εξακολουθήσουν όλες να βρίσκονται σε ισορροπία. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι οι γωνιακές θέσεις των μαζών είναι σταθερές στις κορυφές του κανονικού N -γώνου. Θα επιτρέψουμε όμως στο δακτυλιοειδές αυτό Σύμπαν να έχει μεταβλητή με το χρόνο ακτίνα $R(t)$.

Ποια θα είναι τότε η κινητική ενέργεια του συστήματος; Χρειαζόμαστε ένα σύστημα εντός του Σύμπαντος αυτού για να μετράμε ταχύτητες. Αν επιλέξουμε να μετράμε τις ταχύτητες ως προς μία οποιαδήποτε μάζα,⁸ η

⁸Αυτός είναι ουσιαστικά ο αντίστοιχος νόμος του Hubble για το μονοδιάστατο αυτό Σύμπαν, αφού, όσο μακρύτερα βρίσκεται ένα άστρο, τόσο ταχύτερα θα φαίνεται ότι απομακρύνεται αυτό από την κεντρική μάζα που γίνεται η παρατήρηση, αν η ακτίνα του Σύμπαντος μεγαλώνει.

ταχύτητα της k -οστής μάζας στα δεξιά ή στα αριστερά από τη μάζα που επιλέξαμε θα είναι

$$v_k = \dot{R}(t) \frac{2\pi k}{N}, \quad 1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}.$$

Επομένως, η κινητική ενέργεια όλου του Σύμπαντος θα είναι ανάλογη του $\dot{R}(t)^2$. Η δυναμική ενέργεια, όντας το άθροισμα όλων των δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης των επί μέρους μαζών θα είναι

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij} = \frac{N}{2} \sum_{i=1}^{N-1} V_{iN},$$

δηλαδή θα είναι ανάλογη της ακτίνας $R(t)$. Συνολικά, η Λαγκρανζιανή του Σύμπαντος θα είναι

$$L = \frac{1}{2} m \alpha \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 \dot{R}^2 - \frac{1}{2} G^{(10)} m^2 \beta \left(\frac{2\pi}{N} \right) R, \quad (7.39)$$

όπου α, β αριθμητικοί παράγοντες που σχετίζονται με το άθροισμα των κινητικών και δυναμικών ενεργειών αντίστοιχα. Συγκεκριμένα,

$$\alpha = 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} k^2 = \frac{N(N-1)(N+1)}{12},$$

–το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών θέσεων για κάθε ημικύκλιο– και

$$\beta = 2N \sum_{k=1}^{(N-1)/2} k = \frac{N(N-1)(N+1)}{4},$$

–το διπλάσιο του αθροίσματος των σχετικών θέσεων για κάθε ημικύκλιο και για κάθε μάζα. Η εξέλιξη του Σύμπαντος θα διέπεται από τη δυναμική σχέση που υπαγορεύει η εξίσωση Euler - Lagrange

$$\ddot{R} = -G^{(10)} m \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{N}{4\pi} = -\frac{3G^{(10)}}{4\pi} M_{ολ}, \quad (7.40)$$

όπου $M_{ολ} = Nm$ η ολική μάζα του Σύμπαντος. Με άλλα λόγια το Σύμπαν θα επιβραδύνει την αύξηση της ακτίνας του με σταθερό ρυθμό. Αν ο αρχικός ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος ήταν $\dot{R}(0) = u_0$, το Σύμπαν θα φτάσει στο μέγιστο μέγεθός του

$$R_{\max} = \frac{2\pi u_0^2}{3G^{(10)} M_{ολ}} \quad (7.41)$$

σε χρόνο

$$T = \frac{4\pi u_0}{3G^{(10)} M_{ολ}} \quad (7.42)$$

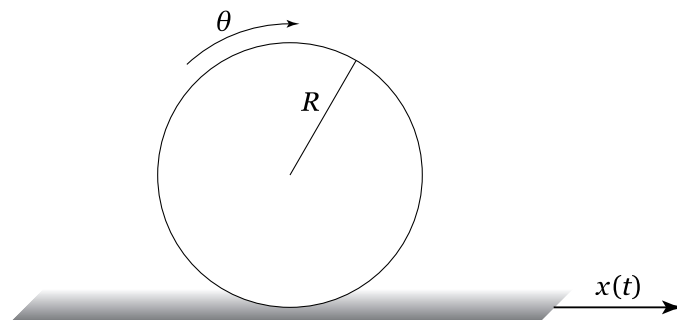
με την προϋπόθεση βέβαια ότι είχε ξεκινήσει με σχεδόν μηδενικές διαστάσεις. Φυσικά, ύστερα από άλλο τόσο χρονικό διάστημα οι διαστάσεις του θα εκμηδενιστούν και πάλι. Από μια άποψη αυτό είναι το μονοδιάστατο ανάλογο του χρονικού της εξέλιξης του πραγματικού μας Σύμπαντος, εφόσον οι μοναδικές δυνάμεις που δρουν είναι οι βαρυτικές έλξεις μεταξύ των συνιστωσών του.

7.11 Προβλήματα

1. Ένα φορτισμένο σωματίδιο είναι υποχρεωμένο να κινείται επάνω σε ένα επίπεδο. Το σωματίδιο βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, εν γένει πλάγιο σε σχέση με το επίπεδο. Τι μορφή έχει η τροχιά της κίνησης που εκτελεί το σωματίδιο;
2. Ένα σωματίδιο κινείται ελεύθερα στην επιφάνεια μίας σφαίρας. Προσδιορίστε την κίνησή του.
3. Αβαρές σχοινί περνά γύρω από αβαρή τροχαλία που είναι στηριγμένη στην οροφή ενός δωματίου. Στη μία άκρη του σχοινιού είναι δεμένη μία αρμαθιά μπανάνες μάζας M , ενώ στην άλλη άκρη ένας πίθηκος μάζας επίσης M αναρριχάται με σκοπό να φτάσει τις μπανάνες. Αρχικά ο πίθηκος και οι μπανάνες δεν βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Η σχετική μετατόπιση του πιθήκου ως προς την άκρη του σχοινιού είναι $\psi(t)$ με αρχικές συνθήκες $\psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$. Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος και μελετήστε την κίνησή του. Ποιες είναι οι διατηρούμενες ποσότητες και ποια η φυσική σημασία τους. Θα καταφέρει να φτάσει ο πίθηκος τις μπανάνες ;
4. Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει επάνω σε οριζόντιο δάπεδο που κινείται οριζόντια κατά $x(t)$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μάζα M του δακτυλίου είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Προσδιορίστε το λόγο της μετατόπισης του κέντρου του δακτυλίου προς τη μετατόπιση του δαπέδου. Θεωρήστε στη συνέχεια ένα νόμισμα με την ίδια συνολική μάζα M , την ίδια ακτίνα R και το ίδιο κέντρο μάζας, αλλά με τη μάζα καταναμημένη με τέτοιο τρόπο ώστε η περιστροφική κινητική του ενέργεια να είναι

$$\frac{1}{2} M' R^2 \dot{\theta}^2 ,$$

με $M' < M$. Προσδιορίστε το νέο λόγο μετατόπισης του κέντρου βάρους προς τη μετατόπιση του δαπέδου. Τι θα συμβεί, αν τοποθετηθούν δύο δακτύλιοι διαφορετικής ακτίνας, ο ένας δίπλα στον άλλο, πάνω στο κινούμενο δάπεδο; Επιβεβαιώστε την απάντησή σας εκτελώντας το πείραμα.



5. Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή και στη συνέχεια υπολογίστε την κίνηση ενός συστήματος που αποτελείται από ένα δακτύλιο μάζας M και ακτίνας R , ο οποίος μπορεί να κυλιέται σε οριζόντιο επίπεδο, και ενός σωματιδίου μάζας m που ολισθαίνει χωρίς τριβές επάνω στο δακτύλιο ξεκινώντας από το ανώτερο σημείο του δακτυλίου όταν αυτός είναι ακίνητος. Πού βρίσκονται τα δύο σώματα, όταν χάνεται η επαφή του ενός με το άλλο;
6. *Η Λαγκρανζιανή μιας έκρηξης.* Θεωρήστε ως απλουστευμένο μοντέλο μιας έκρηξης ένα σύστημα δύο μαζών που μπορούν να κινούνται πάνω σε έναν άξονα δίχως τριβές. Μεταξύ των δύο μαζών υπάρχει συμπίεσιμένο αβαρές ελατήριο, το οποίο κάποια στιγμή αφήνεται ελεύθερο να αποσυμπιεστεί, έως ότου αποκτήσει το φυσικό του μήκος, οπότε οι δύο μάζες διαχωρίζονται. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και υπολογίστε την κίνηση του συστήματος των δύο μαζών, αν αρχικά αυτά ήταν ακίνητα. Στο όριο που η σταθερά του ελατηρίου τείνει στο άπειρο, αλλά η ενέργεια του συμπίεσιμένου ελατηρίου είναι δεδομένη, ποια είναι η εξίσωση της κίνησης; Έχοντας καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα θα μπορούσατε μήπως να γράψετε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος συμπεριλαμβανοντας μόνο τις κινητικές ενέργειες των μαζών με δεδομένη τη σχετική ταχύτητα των δύο μαζών πριν και μετά την εκτίναξη του ελατηρίου;
7. *Η Λαγκρανζιανή ενός πυραύλου.* Στηριζόμενοι στο αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός πυραύλου, ο οποίος προωθείται από την εκτόξευση αερίων με σταθερό ρυθμό και σχετική ταχύτητα V , σε συνθήκες απουσίας οποιουδήποτε πεδίου. Στη συνέχεια κατασκευάστε την εξίσωση κίνησης του πυραύλου.
8. Ένα σωματίδιο κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Να αναφέρετε όλες τις συμμετρίες της λαγκρανζιανής συνάρτησης και να προσδιορίσετε τις διατηρούμενες ποσότητες. Να συγκρίνετε κατόπιν τις διατηρούμενες ποσότητες με αυτές που διατηρούνται σε ένα ελεύθερο σωματίδιο.
9. Προσδιορίστε την κίνηση σωματιδίου που κινείται ελεύθερα επί μιας ζώνης του Möbius. Η ζώνη προσδιορίζεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x &= -v \sin(u/2) \cos(u) + \cos(u), \\y &= -v \sin(u/2) \sin(u) + \sin(u), \\z &= \cos(u/2),\end{aligned}$$

με $0 \leq v \leq 0.2$ και $0 \leq u < 4\pi$.