Κεφάλαιο 2

Λογισμός των Μεταβολών

"Σε πέντε λεπτά θα πείτε ότι όλα
ήταν τόσο απίστευτα απλά"
Sherlock Holmes

2.1 Πότε ένα συναρτησοειδές καθίσταται στάσιμο

Αναλογία στασιμότητας συναρτησοειδούς και ακροτάτου συνάρτησης

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε μια νέα αρχή, την αρχή του Χάμιλτον, η οποία έχει διαφορετική μαθηματική μορφή από εκείνη των νόμων του Νεύτωνα. Πιο συγκεκριμένα, η αρχή του Χάμιλτον σχετίζεται μαθηματικά περισσότερο με το πρόβλημα της εύρεσης ακροτάτου μιας συνάρτησης. Αυτό που καθιστά το συγκεκριμένο πρόβλημα πιο περίπλοκο είναι το γεγονός ότι η ποσότητα που επιδιώκουμε να καταστήσουμε στάσιμη δεν είναι μία συνήθης συνάρτηση αλλά ένα συναρτησοειδές, δηλαδή μία συνάρτηση το όρισμα της οποίας είναι μία άλλη συνάρτηση. Συγκεκριμένα, η δράση S είναι ένα συναρτησοειδές που εξαρτάται από τη διαδρομή $x(t)$ που επιλέγει κανείς για να ενώσει το αρχικό με το τελικό σημείο στο χώρο μέσα στον οποίο εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου η θέση του μηχανικού συστήματος, είτε πρόκειται για ένα μόνο σωματίδιο είτε για ένα ολόκληρο πλήθος σωματιδίων που συνδέονται μεταξύ τους και ταυτόχρονα αλληλεπιδρούν. Θα δούμε ότι η στασιμοποίηση ενός συναρτησοειδούς είναι ακριβώς ανάλογη με την εύρεση ακροτάτου μιας συνάρτησης και οι εξισώσεις κίνησης στις οποίες θα καταλήξουμε και οι οποίες έχουν την ιδιότητα να καθιστούν το συναρτησοειδές στάσιμο είναι το ανάλογο του μηδενισμού της παραγώγου στην περίπτωση των συναρτησοειδών.

Τι σημαίνει στάσιμο;

Σε γενικές γραμμές η συνταγή που ακολουθήσαμε, όταν, ξεκινώντας από τη μορφή της δράσης για τα μηχανικά συστήματα, καταλήξαμε στο θεμελιώδη νόμο της δυναμικής, είναι αυτή που θα ακολουθήσουμε και για την εύρεση της συνθήκης που καθιστά ένα συναρτησοειδές στάσιμο. Ας θεωρήσουμε ένα συναρτησοειδές της μορφής

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L dt \ ,$$

όπου η L θα υποθέσουμε ότι είναι συνάρτηση κάποιων άλλων συναρτήσεων του t· των $x_i(t)$ και των παραγώγων των συναρτήσεων αυτών ως προς $t, \dot{x}_i(t), \ddot{x}_i(t), \ldots$ Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση L, την οποία θα ονομάζουμε *Λαγκρανζιανή* (Lagrangian) όταν πρόκειται να περιγράψουμε ένα φυσικό σύστημα, είναι συνάρτηση μόνο των συναρτήσεων $x_i(t)$ και των πρώτων παραγώγων τους $\dot{x}_i(t)$ καθώς επίσης και, εν γένει, του ίδιου του t. Μια τέτοια υπόθεση είναι δικαιολογημένη, όταν πρόκειται για μηχανικά συστήματα, αφού ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι διαφορικός νόμος δεύτερης τάξης και επομένως απαιτείται η γνώση και της αρχικής θέσης και της ταχύτητας ενός σώματος για τον προσδιορισμό της τροχιάς του.[1] Η απαίτηση να λαμβάνει η S ακρότατη τιμή για κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις $x_i(t)$ σημαίνει, όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι, αν παραλλάξουμε ελαφρώς τις συναρτήσεις αυτές, η τιμή της S δεν μεταβάλλεται. Για την ακρίβεια η τιμή της μεταβάλλεται σε δεύτερη τάξη συγκριτικά με τη μεταβολή των συναρτήσεων, όπως και το ακρότατο μιας συνάρτησης είναι εκείνο το σημείο κοντά στο οποίο η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης είναι δεύτερης τάξης συγκριτικά με τη μετακίνηση από το εν λόγω σημείο. Φορμαλιστικά, πρέπει

$$\tilde{S} - S = \int_{t_A}^{t_B} L(\tilde{x}_i(t), \dot{\tilde{x}}_i(t), t)dt - \int_{t_A}^{t_B} L(x_i(t), \dot{x}_i(t), t)dt = \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (2.1)$$

Κατασκευή ελαφρώς παραλλαγμένων συναρτήσεων

όπου $\tilde{x}_i(t)$ είναι όλες οι παραλλαγμένες συναρτήσεις από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση L και ϵ είναι μια πολύ μικρή παράμετρος που καθορίζει το πόσο κοντά είναι οι παραλλαγμένες συναρτήσεις σε εκείνες τις συναρτήσεις $x_i(t)$ [2] που καθιστούν την S ακρότατο

$$\tilde{x}_i(t) = x_i(t) + \epsilon \xi_i(t) \ .$$

Οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ είναι τυχαίες, ομαλά συμπεριφερόμενες και όχι κατ' ανάγκην επιλεγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να παίρνουν μικρές τιμές. Η απαίτηση της μικρής παρέκκλισης εξασφαλίζεται από την παράμετρο ϵ που πολλαπλασιάζει αυτές τις συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ καθορίζουν με ποιον ακριβώς τρόπο οι παραλλαγμένες συναρτήσεις διαφοροποιούνται από τις συναρτήσεις–λύσεις του προβλήματός μας. Η μόνη απαίτηση για αυτές τις συναρτήσεις, σύμφωνα με την αρχή ελάχιστης δράσης, είναι να ισχύει

$$\xi_i(t_A) = \xi_i(t_B) = 0 \ ,$$

δηλαδή οι παραλλαγμένες συναρτήσεις να έχουν την ίδια τιμή με τις συναρτήσεις–λύσεις στα άκρα της ολοκλήρωσης. Αναπτύσσοντας τώρα τη συνάρτηση L της οποίας μεταβλητές είναι οι παραλλαγμένες συναρτήσεις

Ανάλυση της δράσης που αντιστοιχεί στην παραλλαγμένη διαδρομή

[1] Η σύνδεση της τάξης των παραγώγων που εμφανίζονται στην L και της τάξης του διαφορικού νόμου του Νεύτωνα θα αναλυθεί εκτενέστερα στο εδάφιο 3.2. Βλέπε σχετικά το Πρόβλημα 5.

[2] Τα $x_i(t)$ δεν είναι κατ' ανάγκην οι συνιστώσες κάποιου διανύσματος θέσης σωματιδίου· πρόκειται, απλώς, για ένα συνοπτικό τρόπο γραφής ενός συνόλου ανεξαρτήτων μεταξύ τους συναρτήσεων.

σε όρους μηδενικής, πρώτης κ.ο.κ. τάξης ως προς τη μικρή παράμετρο ϵ βρίσκουμε ότι

$$L((\tilde{x}_i(t), \dot{\tilde{x}}_i(t), t) = L(x_i(t), \dot{x}_i(t), t) + \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\xi}_i \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.2)$$

όπου με το συμβολισμό

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i \ ,$$

εννοούμε

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i \ ,$$

ακολουθώντας την αθροιστική σύμβαση του Αϊνστάιν για τους επαναλαμβανόμενους δείκτες (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα). Ομοίως ισχύει και για τον άλλο αντίστοιχο όρο της σχέσης (2.2). Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση του αναπτύγματος της L, η διαφορά των δύο S που αντιστοιχούν στις παραπλήσιες διαδρομές δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\tilde{S} - S = \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\xi}_i \right) dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \quad (2.3)$$

Προκειμένου, λοιπόν, η S να καθίσταται στάσιμη, πρέπει ο όρος πρώτης τάξης ως προς ϵ να είναι μηδενικός και μάλιστα για οποιαδήποτε επιλογή των συναρτήσεων ξ_i. Αν μάλιστα επαναλάβουμε το τέχνασμα με την παραγοντική ολοκλήρωση που χρησιμοποιήσαμε και στην πρώτη μας απόπειρα εύρεσης του ακροτάτου της δράσης (βλ. Κεφάλαιο 1), καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \xi_i dt + \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \xi_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \xi_i \right]_{t_A}^{t_B} \ . \quad (2.4) \end{aligned}$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι στάσιμη η δράση

΄Ομως, ο τελευταίος όρος είναι μηδενικός, αφού η τιμή των συναρτήσεων ξ_i στα άκρα έχει ληφθεί μηδενική. Η απαίτηση, λοιπόν, το ολοκλήρωμα που απομένει να είναι ταυτοτικά μηδέν μας θυμίζει τη μαθηματική πρόταση που συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με μια μικρή όμως διαφορά: Στην παρούσα περίπτωση η ποσότητα που μηδενίζεται δεν είναι ένα απλό ολοκλήρωμα, αλλά ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων. (Θυμηθείτε την αθροιστική σύμβαση!) Μπορεί, βέβαια, κανείς με μια μικρή τροποποίηση της προηγούμενης απόδειξης να δείξει ότι και σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right)$$

πρέπει να είναι μηδενική για κάθε τιμή του δείκτη i.

Απόδειξη: Η απόδειξη που ακολουθεί είναι κατ' ουσίαν επανάλειψη της αντίστοιχης απόδειξης που δώσαμε στο τέλος του εδαφίου 1.1. Η διαφορά είναι απλώς ότι τώρα αναφερόμαστε σε περισσότερες από μία διαστάσεις. (i) Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις εντός των τετράγωνων αγκυλών και πιο συγκεκριμένα η πρώτη από αυτές (για $i = 1$) *δεν* είναι μηδενικές

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) \neq 0 \ . \tag{2.5}$$

(ii) Επιλέγουμε ως $\xi_i(t)$ το σύνολο των συναρτήσεων $\xi_1(t), \xi_2(t) = 0$, $\xi_3(t) = 0, \ldots$, όπου ειδικά η $\xi_1(t)$ έχει επιλεγεί ώστε να μηδενίζεται οπουδήποτε αλλού εκτός από μια μικρή περιοχή στην οποία η συνάρτηση της έκφρασης (2.5) έχει σταθερό πρόσημο και δεν μηδενίζεται. Κατασκευάζουμε την $\xi_1(t)$ έτσι ώστε να έχει και αυτή σταθερό πρόσημο σε αυτή την περιοχή. (iii) Τότε το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος (2.4) δεν θα είναι μηδενικό, πράγμα το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την αρχική μας απαίτηση. (iv) Συνεπώς, η παράσταση (2.5) πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν. (v) Επαναλαμβάνουμε όλα τα προηγούμενα βήματα με τη δεύτερη, τρίτη κ.ο.κ. συνιστώσα της συνάρτησης

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \ ,$$

φροντίζοντας πάντα να μηδενίζουμε όλες τις άλλες συναρτήσεις $\xi_i(t)$ εκτός από αυτή που έχει ίδιο δείκτη με τη συνάρτηση που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνάγουμε, λοιπόν, ότι

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \ , \tag{2.6}$$

για κάθε τιμή του i.

Οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται *εξισώσεις Euler - Lagrange* και, υπό μία έννοια, μπορούν να θεωρηθούν ως οι παράγωγοι του συναρτησοειδούς S ως προς την κάθε συνάρτηση $x_i(t)$. Αυτές οι εξισώσεις μάς οδηγούν στη λύση του ευρύτερου προβλήματός μας. Είναι, δηλαδή, διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, οι λύσεις των οποίων καθιστούν το συναρτησοειδές S στάσιμο. Πιο συγκεκριμένα όσον αφορά στα μηχανικά συστήματα οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι οι διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες πηγάζουν οι εξισώσεις κίνησης αυτών των συστημάτων.

Παραδείγματα προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με το λογισμό των μεταβολών

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα που μπορούμε να επιλύσουμε χρησιμοποιώντας το *λογισμό των μεταβολών* που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

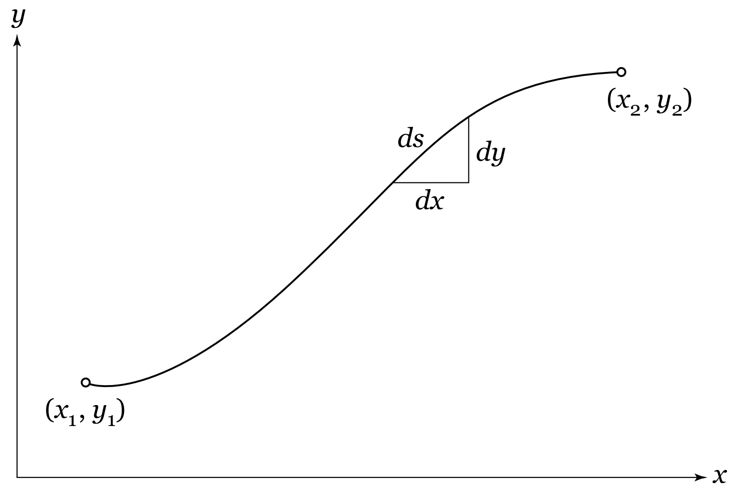
Γεωμετρικό πρόβλημα. Ποια επίπεδη καμπύλη που συνδέει δύο δεδομένα σημεία είναι η συντομότερη;

Λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος ένα απειροστό τμήμα μιας επίπεδης καμπύλης θα έχει μήκος $ds^2 = dx^2 + dy^2$ (βλ. Σχήμα 2.1). Έτσι, το συνολικό μήκος της τυχαίας καμπύλης που συνδέει το σημείο A με το σημείο B θα είναι

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_A^B dx \sqrt{1 + (y')^2} \ . \tag{2.7}$$

Η συνάρτηση L αυτού του προβλήματος είναι η

$$L(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2} \ ,$$



Σχήμα 2.1: Η εύρεση του μήκους μιας επίπεδης καμπύλης που συνδέει δύο σημεία του επιπέδου.

η οποία εξαρτάται μόνο από την $y'(x) \equiv dy/dx$. Η συντομότερη καμπύλη θα περιγράφεται από εκείνη τη συνάρτηση $y(x)$, η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \, . \tag{2.8}$$

Αφού η L για το δεδομένο πρόβλημα δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή $y(x)$ η εξίσωση Euler - Lagrange οδηγεί στη σταθερότητα της $\partial L/\partial y'$, δηλαδή,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \, , \tag{2.9}$$

δηλαδή στη συνάρτηση y για την οποία

$$y' = \text{σταθερά} \, . \tag{2.10}$$

Η συντομότερη επίπεδη "καμπύλη", λοιπόν, που συνδέει δύο σημεία έχει σταθερή κλίση, δηλαδή είναι μια ευθεία της μορφής $y = y_0 + c(x - x_0)$. Ο προσδιορισμός των σταθερών παραμέτρων μπορεί να επιτευχθεί από την απαίτηση η ευθεία αυτή να διέρχεται από τα δεδομένα σημεία Α, Β. Παρατηρούμε ότι η λύση της εξίσωσης Euler - Lagrange δεν καθορίζει παρά μόνο τη μορφή της ζητούμενης συνάρτησης και όχι την ακριβή της έκφραση· η ακριβής τιμή των ελεύθερων παραμέτρων, εδώ των x_0, y_0, c, καθορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.
Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου.[3] Τι σχήμα πρέπει να έχει μια τσουλήθρα, η οποία ενώνει δύο σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επί-

[3]Το πρόβλημα αυτό τέθηκε την Πρωτοχρονιά του 1697 από τον Johann Bernoulli ως πρόκληση προς "τους καλύτερους μαθηματικούς όλου του κόσμου". Μη λαμβάνοντας απάντηση από τους γάλλους και τους ολλανδούς μαθηματικούς, ο Bernoulli απέστειλε το πρόβλημα στη Βασιλική Ακαδημία (Royal Society), η οποία στη συνέχεια το διαβίβασε στο Νεύτωνα. Ο Νεύτων έλυσε το πρόβλημα την ίδια κιόλας ημέρα και έστειλε τη σύντομη αλλά δυσνόητη λύση του ανωνύμως στον Bernoulli, ο οποίος αναγνώρισε από τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος το συγγραφέα της λύσης, αναφωνώντας το περίφημο "εξ όνυχος τον λέοντα".

πεδο, ώστε ένα σώμα ολισθαίνοντας ελεύθερα επάνω σε αυτή, χωρίς αρχική ταχύτητα, να φτάσει από το ένα άκρο στο άλλο στο συντομότερο δυνατό χρόνο;

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό τμήμα ds της ζητούμενης καμπύλης με οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα dx και dy αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 2.2). Αν u είναι η στιγμιαία ταχύτητα με την οποία το κινητό διασχίζει το εν λόγω διάστημα, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το ολισθαίνον σώμα να διατρέξει το ds θα είναι ίσο με ds/u. Επομένως, η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε είναι η

$$\int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{u} = \int_A^B dx \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{u} \ .$$

Παράλληλα, γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα u, λόγω διατήρησης της ενέργειας, είναι συνάρτηση μόνο του ύψους y και πιο συγκεκριμένα δίνεται από την έκφραση

$$u(y) = \sqrt{-2gy} \ .$$

Στο πρόβλημα τούτο η συνάρτηση L είναι πιο πολύπλοκη απ' ό,τι στο προηγούμενο γεωμετρικό πρόβλημα και εξαρτάται τόσο από την y όσο και από την y'. Ύστερα από μερικές πράξεις η εξίσωση Euler - Lagrange καταλήγει στη διαφορική εξίσωση

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0 \ . \tag{2.11}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (2.11) με y', η παραπάνω εξίσωση γράφεται α-πλούστερα ως εξής:

$$\frac{d}{dx}[y(1+(y')^2)] = 0 \ .$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$y(1+(y')^2) = \text{σταθ} \ .$$

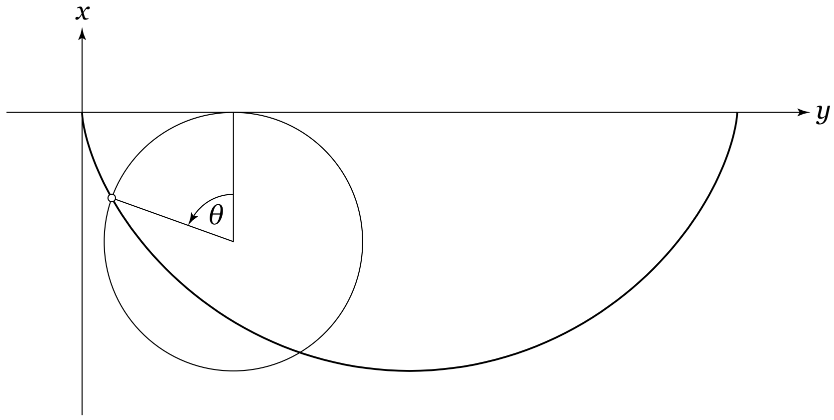
Η τελευταία αυτή σχέση επαληθεύεται από την εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης (βλ. Σχήμα 2.2) με παραμετρική μορφή

$$x(\theta) = A(\theta - \sin\theta) \ , \tag{2.12}$$
$$y(\theta) = A(-1 + \cos\theta) \ , \tag{2.13}$$

όπου θ είναι μια παράμετρος που λαμβάνει τιμές από 0 έως 2π. *Κυκλοειδής καμπύλη* είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου, ο οποίος κυλίεται επάνω σε ένα επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η τιμή της παραμέτρου A πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε η κυκλοειδής καμπύλη να προσαρμόζεται στα δεδομένα ακραία σημεία. Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει

$$A = \frac{L}{2\pi} \ ,$$

όπου L η οριζόντια απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων σημείων.



Σχήμα 2.2: Η κυκλοειδής καμπύλη αποτελεί τη λύση στο πρόβλημα του βραχυστόχρονου.

Πρόβλημα μηχανικής. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης. Μάθαμε, ήδη, να γράφουμε τη δράση για τα μηχανικά συστήματα ως το ολοκλήρωμα της διαφοράς μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Επομένως, η λαγκρανζιανή συνάρτηση για το πρόβλημα αυτό είναι η

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 + m\vec{g}\cdot\vec{x} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) - mgz\,.$$

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης η φυσική διαδρομή πρέπει να είναι τέτοια ώστε η δράση να καθίσταται στάσιμη και συνεπώς να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Στο πρόβλημα που εξετάζουμε η λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι συνάρτηση των τριών καρτεσιανών συντεταγμένων της θέσης του σωματιδίου και των παραγώγων τους. Επομένως, υπάρχουν τρεις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= 0\,,\\
\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= 0\,,\\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= 0\,,
\end{aligned}$$

οι οποίες ύστερα από απλές παραγωγίσεις λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= 0\,,\\
m\ddot{y} &= 0\,,\\
m\ddot{z} + mg &= 0\,.
\end{aligned}$$

Η λύση αυτών των εξισώσεων δίνει τη γνωστή μας παραβολική κίνηση

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + u_x t\,,\\
y(t) &= y_0 + u_y t\,,\\
z(t) &= z_0 + u_z t - \frac{1}{2}gt^2\,.
\end{aligned}$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, οι εξισώσεις Euler - Lagrange δεν εμπεριέχουν καμία πληροφορία σχετικά με τα ακραία σημεία της διαδρομής. Στην πραγματικότητα, οι εξισώσεις Euler - Lagrange αποτελούν για τα μηχανικά συστήματα μια εναλλακτική παρουσίαση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα· είναι, δηλαδή, διαφορικές εξισώσεις που "υπαγορεύουν" στο μηχανικό σύστημα με ποιο τρόπο να "κινηθεί" σε κάθε χρονική στιγμή. Τα ακραία σημεία απλώς καθορίζουν τις παραμέτρους της φυσικής διαδρομής του συστήματος ώστε η διαδρομή να διέρχεται από αυτά τα σημεία.

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange, σε αντιδιαστολή με τις εξισώσεις του Νεύτωνα, διατηρούν την ίδια μορφή σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων

Μία ακόμη πιο σημαντική παρατήρηση είναι ότι, ενώ ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων λαμβάνει διαφορετική μορφή, οι εξισώσεις Euler - Lagrange μένουν απαράλλακτες. Αυτό που κάθε φορά αλλάζει είναι απλώς η μορφή της Λαγκρανζιανής. Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, ένα πρόβλημα κίνησης σωματιδίου σε κάποιο κεντρικό πεδίο δυνάμεων και με τις δύο μεθοδολογίες.

• **Νευτώνεια μεθοδολογία:** Η κίνηση του σωματιδίου, που για λόγους απλούστευσης θα θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι πραγματοποιείται σε ένα επίπεδο, διέπεται από το διανυσματικό νόμο

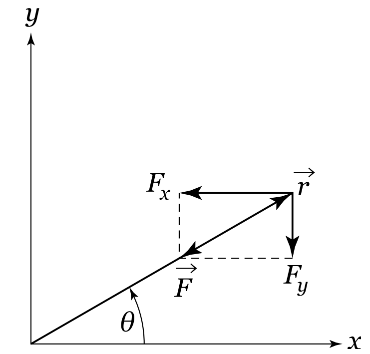
$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \ .$$

Γράφοντας αυτή τη σχέση σε καρτεσιανές συντεταγμένες με κέντρο του συστήματος το κέντρο του πεδίου δυνάμεων, λαμβάνουμε

$$F_x = F(r)\frac{x}{r} = m\ddot{x} \ , \tag{2.14}$$

$$F_y = F(r)\frac{y}{r} = m\ddot{y} \ , \tag{2.15}$$

ενώ σε πολικές συντεταγμένες (βλ. Σχήμα 2.3), ύστερα από κάποιες, σχε-



Σχήμα 2.3: Συσχέτιση καρτεσιανών και πολικών συνιστωσών μιας κεντρικής δύναμης.

τικά επίπονες, πράξεις διανυσματικής ανάλυσης λαμβάνουμε

$$F_r = F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \ , \tag{2.16}$$

$$F_\theta = 0 = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \ . \tag{2.17}$$

• **Αναλυτική μεθοδολογία:** Η Λαγκρανζιανή στις καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \ ,$$

ενώ στις πολικές συντεταγμένες λαμβάνει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \ ,$$

όπου $V(r) = -\int F(r')dr'$. Οι εξισώσεις Euler - Lagrange που θα χρησιμοποιήσουμε για να εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης είναι αυτές που ήδη γράψαμε και δεν χρειάζεται να διαφοροποιηθούν καθόλου εξαιτίας της αλλαγής του συστήματος αναφοράς. Οι εξισώσεις κίνησης θα καταλήξουν στις νευτώνειες εξισώσεις που γράψαμε παραπάνω ανάλογα με την επιλογή του συστήματος αναφοράς (βλ. Άσκηση 2.1). Η σύγκριση μεταξύ της νευτώνειας και της αναλυτικής θεώρησης είναι οφθαλμοφανής. Οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι γενικότερης εφαρμογής και αυτό μας διευκολύνει, αφού στην ανάλυση μας δεν χρειάζεται να απομνημονεύουμε πολλές διαφορετικές εκφράσεις.

Άσκηση 2.1. *Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange, δείξτε ότι οι δύο παραπάνω Λαγκρανζιανές οδηγούν στις αντίστοιχες νευτώνειες εξισώσεις κίνησης.* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2 Σημειακοί μετασχηματισμοί

Έως τώρα δείξαμε ότι η αρχή του Χάμιλτον είναι ισοδύναμη με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αν γράψουμε τη Λαγκρανζιανή ενός μηχανικού συστήματος ως τη διαφορά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος με τις θέσεις και τις ταχύτητες, όπως αυτές μετρώνται σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Τι θα συνέβαινε, όμως, αν αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων επιλέγαμε κάποιες άλλες γενικότερες συντεταγμένες; Σε αυτή την περίπτωση η ισοδυναμία των εξισώσεων Euler - Lagrange με τις εξισώσεις του Νεύτωνα δεν είναι προφανής.

Έστω ένα φυσικό σύστημα, το οποίο διέπεται από τη λαγκρανζιανή συνάρτηση $L(x, \dot{x}, t)$ όπου το x, και αντίστοιχα το $\dot{x}$, μπορεί να συμβολίζει ένα ολόκληρο πλήθος από συντεταγμένες που απαιτούνται για τον καθορισμό της θέσης και αντίστοιχα της ταχύτητας των μερών του συστήματος. Θεωρούμε, τώρα, νέες συντεταγμένες q, τόσες όσες και οι x, οι οποίες συνδέονται με τις αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των σχέσεων

Τι είναι σημειακός μετασχηματισμός;

$$q_i = q_i(x, t) \ .$$

Οι νέες συντεταγμένες προκύπτουν από τις αρχικές με έναν *σημειακό μετασχηματισμό*, δηλαδή έναν μετασχηματισμό σημείο προς σημείο. Θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή κάθε σημείο στις καινούργιες συντεταγμένες αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο στις αρχικές συντεταγμένες. Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε τις αρχικές καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει των νέων συντεταγμένων q ως

$$x_i = x_i(q, t) \ .$$

Έχουμε, ήδη, χρησιμοποιήσει σημειακούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της κίνησης ενός σώματος σε κεντρικό πεδίο γνωρίζουμε ότι είναι προτιμότερο να επιλέξουμε πολικές συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε το χρονοανεξάρτητο σημειακό μετασχηματισμό από τις συνήθεις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) στις πολικές (r, θ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \ \ \tan\theta = \frac{y}{x}\ .$$

Άλλο παράδειγμα χρονοεξαρτώμενου, αυτή τη φορά, σημειακού μετασχηματισμού είναι η μετάβαση από ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς σε άλλο μη αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα που κινείται με μεταβαλλόμενη σχετική ταχύτητα $\vec{V}(t)$ ως προς το αρχικό. Σε αυτή την περίπτωση οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται ως εξής

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \int_0^t \vec{V}(\tau) d\tau\ ,$$

όπου $\vec{x}\,'$ οι νέες συντεταγμένες και $\vec{x}$ οι αρχικές συντεταγμένες.

Στο προηγούμενο εδάφιο είδαμε ότι μια τέτοια αλλαγή συντεταγμένων διαφοροποιεί τη μορφή των νευτώνειων εξισώσεων, όχι όμως και των εξισώσεων Euler - Lagrange. Έχει άραγε το γεγονός αυτό γενική ισχύ; Είναι, δηλαδή, οι εξισώσεις Euler - Lagrange αναλλοίωτες σε οποιονδήποτε σημειακό μετασχηματισμό;

Από τη στιγμή που έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η φυσική κίνηση αντιστοιχεί σε εκείνη τη διαδρομή για την οποία η δράση καθίσταται στάσιμη και συνεπώς η διαδρομή είναι εκείνη που ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange, είναι προφανές ότι, αν η δράση

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(x, \dot{x}, t) dt$$

Η αρχή του Χάμιλτον δεν ενδιαφέρεται για τις συντεταγμένες στις οποίες γράφεται η διαδρομή του συστήματος

καθίσταται στάσιμη για τη διαδρομή $x(t)$, θα καθίσταται στάσιμη και για την ίδια διαδρομή εκπεφρασμένη στις συντεταγμένες q, δηλαδή για τη διαδρομή $q(x(t), t)$. Επειδή

$$\dot{x} = \frac{\partial x(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x(q,t)}{\partial t}\ ,$$

θα ισχύουν ταυτοτικά οι ισότητες

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_A}^{t_B} L\left(x(q,t), \frac{\partial x(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x(q,t)}{\partial t}, t\right) dt \\ &= \int_{t_A}^{t_B} L'(q, \dot{q}, t) dt\ , \end{aligned}$$

όπου με L' συμβολίσαμε τη Λαγκρανζιανή στις νέες συντεταγμένες

$$L'(q, \dot{q}, t) \equiv L\left(x(q,t), \frac{\partial x(q,t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x(q,t)}{\partial t}, t\right)\ . \tag{2.18}$$

Η παραπάνω ισότητα δεν είναι ισότητα συναρτησιακών εκφράσεων, αλλά ισότητα αριθμητική μεταξύ δύο συναρτήσεων. Συνεπώς, επειδή η $x(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \;=\; 0 \; ,$$

τότε και η $q(x(t), t)$, επειδή και αυτή η διαδρομή καθιστά τη δράση ακρότατη, πρέπει να ικανοποιεί τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} \;=\; 0 \; ,$$

όπου η Λαγκρανζιανή $L'(q, \dot{q}, t)$ που διέπει τη δυναμική του συστήματος στις νέες συντεταγμένες είναι, όπως αναφέραμε, η αρχική Λαγκρανζιανή $L(x, \dot{x}, t)$, εκπεφρασμένη στις νέες συντεταγμένες q. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οι εξισώσεις Euler - Lagrange, σε αντίθεση με τις εξισώσεις του Νεύτωνα, είναι αναλλοίωτες στους σημειακούς μετασχηματισμούς και έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα αναφοράς, ακόμη και εάν αυτά δεν είναι αδρανειακά.[4] Η παραπάνω πρόταση μπορεί να αποδειχθεί, αρκετά πιο επίπονα βέβαια, αν εκτελέσουμε συστηματικά τις παραγωγίσεις των εξισώσεων Euler - Lagrange στη νέα Λαγκρανζιανή L' (βλ. Πρόβλημα 4).

Άσκηση 2.2. *Γράψτε τις εξισώσεις Euler - Lagrange ενός ελεύθερου σωματιδίου στις συντεταγμένες $\vec{x}\,'$, όπου* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \int_0^t \vec{V}(\tau) d\tau \; .$$

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange θα περιγράφουν, τότε, τις εξισώσεις κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου σε ένα επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς.

Αν, λοιπόν, το μηχανικό σύστημα περιγράφεται σε ένα καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα από τη Λαγκρανζιανή $L = E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}}$, όπου $E_{\text{κιν}}$ η κινητική και $E_{\text{δυν}}$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος, τότε σε οποιεσδήποτε άλλες συντεταγμένες η δυναμική του συστήματος θα περιγράφεται και πάλι από τη Λαγκρανζιανή $L = E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}}$, όπου η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι τώρα εκπεφρασμένες στις νέες συντεταγμένες. Φορμαλιστικά, η Λαγκρανζιανή θα είναι μια νέα συνάρτηση L' των νέων συντεταγμένων. Για παράδειγμα, ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται στο χώρο θα περιγράφεται από τη λαγκρανζιανή συνάρτηση

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \; ,$$

[4] Ποια είναι, τότε, η σημασία του πρώτου νόμου του Νεύτωνα; Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα έχει κρίσιμη σημασία για την κατασκευή της λαγκρανζιανής συνάρτησης.

αν χρησιμοποιηθούν καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν, όμως, είχαμε επιλέξει ως συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης τις κυλινδρο-πολικές συντεταγμένες (ρ, θ, z), τότε επειδή

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \ , \\ y &= \rho \sin\theta \ , \end{aligned}$$

θα ήταν

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \ , \\ \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς, η κινητική ενέργεια και επομένως η Λαγκρανζιανή που διέπει τη δυναμική του σωματιδίου θα δίνεται από την έκφραση

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \ .$$

Η κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου σε κυλινδρο-πολικές συντεταγμένες μπορεί να εξαχθεί από τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad &\text{ή} \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = 0 \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad &\text{ή} \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) = 0 \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad &\text{ή} \quad m\ddot{z} = 0 \ . \end{aligned}$$

Το τέχνασμα του Landau για την κινητική ενέργεια σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων

Σε αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε το τέχνασμα του Landau για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Επειδή η κινητική ενέργεια είναι

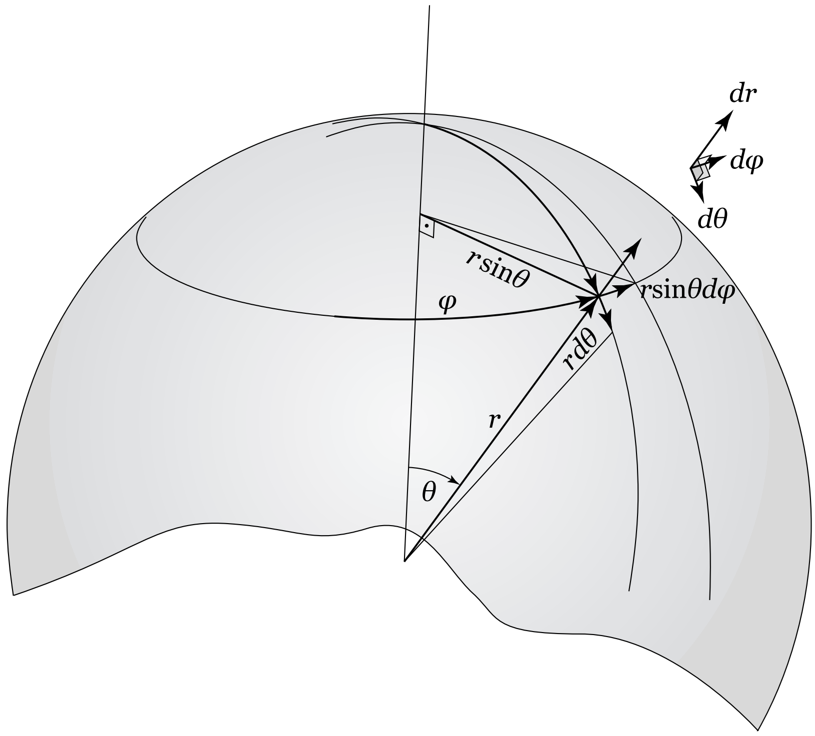
$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}mu^2 \ ,$$

όπου u το μέτρο της ταχύτητας, και ισχύει ότι

$$u^2 = \frac{(ds)^2}{(dt)^2} \ ,$$

όπου το ds είναι η διαφορική απόσταση μεταξύ δύο σημείων, για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, αρκεί να γράψουμε το τετράγωνο της διαφορικής απόστασης μεταξύ δύο σημείων στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, για παράδειγμα, σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το τετράγωνο της διαφορικής απόστασης μεταξύ των σημείων (x, y, z) και $(x + dx, y + dy, z + dz)$, βάσει του πυθαγορείου θεωρήματος, είναι

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \ .$$



Σχήμα 2.4: Οι σφαιρικές συντεταγμένες και η ανάλυση του απειροστού μήκους ως συνάρτηση των τριών κάθετων μεταβολών $dr, rd\theta, r\sin\theta d\phi$.

Επομένως, το τετράγωνο της ταχύτητας είναι

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \ ,$$

οπότε η κινητική ενέργεια λαμβάνει τη γνώριμη μορφή. Σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς (βλ. Σχήμα 2.4) ότι η διαφορική απόσταση μεταξύ των σημείων (r, θ, ϕ) και $(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$ είναι

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2 \ ,$$

οπότε το τετράγωνο της ταχύτητας είναι

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \ .$$

Αφού έχουμε υπολογίσει τη λαγκρανζιανή συνάρτηση σε σφαιρικές συντεταγμένες, είναι εύκολο στη συνέχεια από τις εξισώσεις Euler - Lagrange να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες. Έτσι, δεν χρειάζεται να απομνημονεύουμε κάθε φορά τον τρόπο με τον οποίο αναλύεται η επιτάχυνση στις διάφορες συντεταγμένες κατά την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

2.3 Η γενίκευση της έννοιας της ορμής και της ενέργειας

Από τα πρώτα στάδια της μαθηματικής μας εκπαίδευσης ερχόμαστε σε επαφή με τη διαδικασία της γενίκευσης. Αρχικά μαθαίνουμε να εκτελούμε πράξεις με φυσικούς αριθμούς, αλλά σύντομα γενικεύουμε την έννοια του αριθμού και αρχίζουμε να χειριζόμαστε τους ακεραίους, τους ρητούς, τους πραγματικούς, τους μιγαδικούς αριθμούς. Ομοίως, αρχικά γνωρίζουμε την έννοια της δύναμης ενός φυσικού αριθμού, αλλά σύντομα τη γενικεύουμε και ορίζουμε συναρτήσεις της μορφής z^w, όπου οι z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Η ίδια διαδικασία γενίκευσης ακολουθείται και στη φυσική. Ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα

$$m\vec{a} = \vec{F} \ ,$$

με την εφαρμογή της αρχής του Χάμιλτον γενικεύεται, όπως είδαμε, στις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \tag{2.19}$$

όπου q_i είναι οι οποιεσδήποτε συντεταγμένες περιγράφουν το μηχανικό σύστημα και $L(q, \dot{q}, t)$ είναι η λαγκρανζιανή συνάρτηση του μηχανικού συστήματος που εξαρτάται όχι μόνο από τις θέσεις q_i, αλλά και από τις γενικευμένες πλέον ταχύτητες $\dot{q}_i$. Ο νέος δυναμικός νόμος (2.19) μετατρέπεται στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αν περιγράψουμε τη θέση του σωματιδίου με καρτεσιανές συντεταγμένες και ορίσουμε την ορμή p_i που αντιστοιχεί στη συντεταγμένη x_i (με $x_1 = x$, $x_2 = y$ και $x_3 = z$) ως την ποσότητα

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$$

και την αντίστοιχη συνιστώσα της δύναμης ως

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \ .$$

Τότε, ο νόμος του Νεύτωνα και οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι ίδιοι

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \ . \tag{2.20}$$

Σε αντίθεση, όμως, με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η σχέση (2.20) με τις γενικευμένες έννοιες της ορμής και της δύναμης ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων και σε κάθε σύστημα αναφοράς, ακόμη και όταν το σύστημα αναφοράς δεν είναι καρτεσιανό, ούτε καν αδρανειακό. Υπό αυτή την έννοια γενικεύουμε την έννοια της ορμής και ορίζουμε για κάθε συντεταγμένη q_i του φυσικού συστήματος την αντίστοιχη σε αυτή γενικευμένη ορμή, η οποία λέγεται και *γενικευμένη ορμή* συζυγής της συντεταγμένης q_i, ως ακολούθως:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ .$$

Επίσης, ορίζουμε την ποσότητα

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

ως γενικευμένη δύναμη. Με αυτό τον τρόπο δεν γενικεύεται μόνο ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, που αποκτά πλέον ισχύ σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, αλλά γενικεύονται και τα φυσικά μεγέθη του, δηλαδή η ορμή και η δύναμη.

Ας θεωρήσουμε, ως παράδειγμα, ένα σωματίδιο που κινείται στο χώρο υπό την επίδραση ενός γενικού δυναμικού $V(x, y, z)$. Η τρίτη συνιστώσα της στροφορμής του σωματιδίου, δηλαδή η z συνιστώσα αυτής, ως προς την αρχή των αξόνων ορίζεται ως

$$L_z = m\left(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}\right)_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \ , \tag{2.21}$$

ενώ η τρίτη συνιστώσα της ροπής που ασκείται στο σωματίδιο είναι

$$\tau_z = -\left(\vec{x} \times \vec{\nabla} V\right)_z = -\left(x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}\right) \ , \tag{2.22}$$

αφού η δύναμη είναι $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$. Αν περιγράψουμε τη θέση του σωματιδίου σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες (r, θ, z), τότε είναι

$$x = r\cos\theta \ , \tag{2.23}$$
$$y = r\sin\theta \ . \tag{2.24}$$

Υπολογίζοντας στη συνέχεια τις $\dot{x}$ και $\dot{y}$, συμπεραίνουμε ότι η τρίτη συνιστώσα της στροφορμής σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες λαμβάνει την απλή μορφή

$$L_z = mr^2\dot{\theta} \ . \tag{2.25}$$

Ομοίως, επειδή

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= r\left(-\sin\theta\frac{\partial V}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial V}{\partial y}\right) \\
&= x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x} \ ,
\end{aligned}$$

η ροπή τ_z λαμβάνει τη μορφή

$$\tau_z = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \ . \tag{2.26}$$

Σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες η λαγκρανζιανή συνάρτηση ενός σωματιδίου είναι

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V$$

και η γενικευμένη ορμή, συζυγής της συντεταγμένης θ,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \ , \tag{2.27}$$

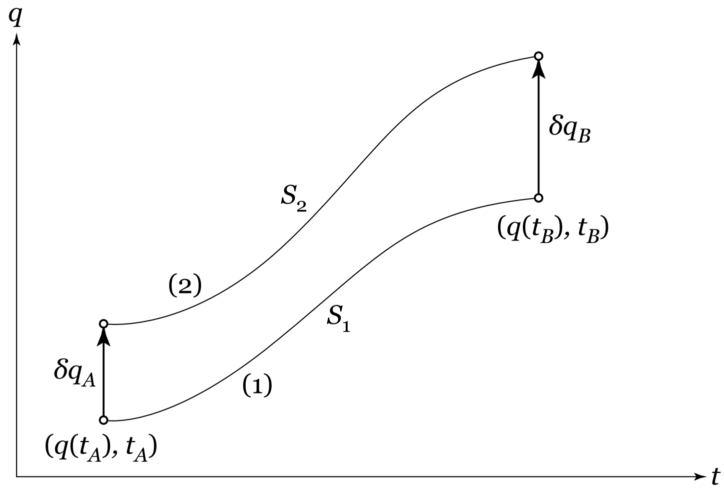
δεν είναι άλλη από την τρίτη συνιστώσα της στροφορμής (2.21). Η δε γενικευμένη δύναμη

$$F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \ , \tag{2.28}$$

είναι η τρίτη συνιστώσα της ροπής και η εξίσωση Euler - Lagrange, όσον αφορά στη θ συντεταγμένη

$$\frac{dp_\theta}{dt} = F_\theta \ ,$$

είναι η γνωστή εξίσωση μεταβολής της στροφορμής του σωματιδίου. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο δυναμικός νόμος εξέλιξης των γενικευμένων ορμών και δυνάμεων περιλαμβάνει άμεσα και δυναμικούς νόμους, οι οποίοι προκύπτουν ως έμμεση συνέπεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.



Σχήμα 2.5: Δύο φυσικές διαδρομές με ελαφρώς μετατοπισμένα άκρα, οι οποίες αντιστοιχούν σε δράσεις S_1, S_2. Εάν οι δράσεις είναι ίδιες για κάποιον μετασχηματισμό των συντεταγμένων, ανεξαρτήτως της επιλογής της αρχικής και της τελικής χρονικής στιγμής, τότε διατηρείται σταθερό το γινόμενο της ορμής επί το μετασχηματισμό των συντεταγμένων.

Διεύρυνση της ισχύος της αρχής διατήρησης της ορμής

Η γενίκευση της έννοιας της ορμής έχει ιδιαίτερη σημασία. Γνωρίζουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα οδηγούν στη διατήρηση της συνολικής ορμής ενός απομονωμένου συστήματος. Η διατήρηση της ορμής, όμως, είναι βαθύτερη αρχή και αποτελεί απόρροια της ομογένειας του χώρου, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Η αρχή αυτή ισχύει ακόμη και σε φυσικά συστήματα για τα οποία δεν ισχύει ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα, όπως για παράδειγμα η αλληλεπίδραση δύο φορτισμένων σωματιδίων, τα οποία κινούνται σε μη παράλληλες κατευθύνσεις. Η διατηρούμενη, όπως θα δούμε, ποσότητα είναι η γενικευμένη και όχι η νευτώνεια ορμή του συστήματος.

Την έννοια της ορμής μπορούμε, ωστόσο, να τη γενικεύσουμε ακολουθώντας διαφορετικό δρόμο και συγκεκριμένα μελετώντας τις μεταβολές της δράσης που αντιστοιχούν σε φυσικές τροχιές. Επειδή η φυσική τροχιά $q_\phi(t)$ που συνδέει τα σημεία (t_A, q_A) και (t_B, q_B) είναι δεδομένη, η δράση που αντιστοιχεί σε αυτή την τροχιά

$$S(q_A, t_A, q_B, t_B) = \int_{t_A}^{t_B} L(q_\phi, \dot{q}_\phi, t)dt \ ,$$

δεν είναι πλέον ένα συναρτησοειδές αλλά μια συνάρτηση των αρχικών και τελικών θέσεων και χρόνων. Ας θεωρήσουμε, τώρα, δύο παραπλήσιες φυσικές διαδρομές· τη μία με αφετηρία στο χρόνο t_A τη θέση $q_\phi(t_A)$ και τελικό σημείο στο χρόνο t_B τη θέση $q_\phi(t_B)$ και την άλλη με αντίστοιχο αρχικό και τελικό σημείο στους ίδιους πάλι χρόνους $q_\phi(t_A) + \delta q(t_A)$ και $q_\phi(t_B) + \delta q(t_B)$ (βλ. Σχήμα 2.5). Η παραπλήσια στην (1) φυσική τροχιά (2) μπορεί να γραφεί ως

$$q'_\phi(t) = q_\phi(t) + \epsilon\xi(t) \ ,$$

όπου ϵ είναι ένας αρκούντως μικρός αριθμός, τέτοιος ώστε

$$\epsilon\xi(t_A) = \delta q(t_A) \ , \ \epsilon\xi(t_B) = \delta q(t_B) \ .$$

Υπολογίζουμε, τώρα, τη μεταβολή της συνάρτησης-δράσης σε πρώτη τάξη ως προς ϵ. Εφαρμόζοντας την αθροιστική σύμβαση, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} S([q'_\phi]) - S([q_\phi]) &= \int_{t_A}^{t_B} \Big(L(q_\phi + \epsilon\xi, \dot{q}_\phi + \epsilon\dot{\xi}, t) - L(q_\phi, \dot{q}_\phi, t) \Big) dt \\ &= \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i \right) dt \\ &= \epsilon\xi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bigg|_{t_A}^{t_B} + \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) \xi_i dt \ . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Τα βήματα που μας οδήγησαν στις παραπάνω σχέσεις είναι τα ίδια με εκείνα που ακολουθήσαμε για να προσδιορίσουμε τη συνθήκη που ικανοποιείται από την τροχιά, η οποία καθιστά τη δράση ακρότατη. Η μόνη διαφορά στον παραπάνω υπολογισμό είναι ότι οι συναρτήσεις $\xi_i(t)$ δεν είναι τυχαίες, διότι παριστάνουν τη διαφορά μεταξύ των δύο γειτονικών φυσικών τροχιών του συστήματος. Επιπλέον, επειδή η $q_\phi(t)$ είναι φυσική τροχιά, κάθε συνιστώσα της $q_\phi(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \ .$$

Από τη στιγμή, λοιπόν, που συγκρίνουμε τη δράση δύο φυσικών τροχιών, εφαρμόζοντας και πάλι την αθροιστική σύμβαση, βρίσκουμε ότι η διαφορά των δράσεων (2.29) είναι

$$\delta S = p_i(t_B)\, \delta q_i(t_B) - p_i(t_A)\, \delta q_i(t_A) \ , \tag{2.30}$$

όπου

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} ,$$

είναι η γενικευμένη ορμή, ενώ $\delta q_i(t_A) = \epsilon \xi_i(t_A)$ και $\delta q_i(t_B) = \epsilon \xi_i(t_B)$ είναι η απόσταση μεταξύ των αρχικών και των τελικών θέσεων των δύο φυσικών διαδρομών. Επειδή και ο τελικός χρόνος και οι τελικές θέσεις του συστήματος έχουν ληφθεί αυθαίρετα, η γενικευμένη ορμή μπορεί να ορισθεί και ως

$$p_i = \left. \frac{\partial S}{\partial q_i} \right|_t , \tag{2.31}$$

όπου S είναι η δράση που αντιστοιχεί στη φυσική τροχιά του συστήματος που συνδέει κάποιο τυχαίο αρχικό σημείο με το σημείο $q_1, q_2, \ldots$ τη χρονική στιγμή t. Στη μερική παραγώγιση η τιμή του χρόνου t διατηρείται σταθερή, όπως επίσης και η αρχική θέση και ο αρχικός χρόνος της τροχιάς του σωματιδίου, τα οποία υπεισέρχονται στη συνάρτηση-δράση.

Μολονότι, στην πράξη ο προσδιορισμός της ορμής με αυτό τον τρόπο είναι επίπονος, αφού απαιτείται να προσδιοριστεί πρώτα η φυσική τροχιά του συστήματος, η γενίκευση του ορισμού της ορμής μέσω της σχέσης (2.31) καταδεικνύει ότι η ορμή του συστήματος προκύπτει από τη δράση με χωρική μετάθεση της τελικής θέσης του συστήματος. Ο ορισμός αυτός μάς οδηγεί, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, σε βαθύτερη κατανόηση του νόμου διατήρησης της ορμής και θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ορμής πιο αφηρημένων φυσικών οντοτήτων, όπως για παράδειγμα των πεδίων ή των κυμάτων.[5] Στο σημείο αυτό πάντως μπορούμε να πάρουμε μια πρώτη γεύση της συσχέτισης μεταξύ της διατήρησης της ορμής και της αναλλοιότητας της δράσης σε κάποιους μετασχηματισμούς. Έστω ότι ανακαλύπτουμε, για παράδειγμα, ότι, αν τα ακραία σημεία μιας φυσικής τροχιάς μετατεθούν κατά

$$\delta q_i^{(A)} = K_i(q(t_A), t_A) \ , \ \delta q_i^{(B)} = K_i(q(t_B), t_B) \ ,$$

όπου τα $K_i(q, t)$ είναι κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις, τότε η δράση που αντιστοιχεί στη νέα φυσική τροχιά που συνδέει τα δύο νέα μετατεθειμένα ακραία σημεία είναι ίση με την αρχική δράση (βλ. Σχήμα 2.5). Αν συμβαίνει τούτο, η μηδενική διαφορά της δράσης μεταξύ των δύο φυσικών τροχιών, οι οποίες έχουν μετατεθεί η μία από την άλλη κατά $K_i(q, t)$, θα σημαίνει, σύμφωνα με τη σχέση (2.30), ότι

$$p_i(t_B) \delta q_i^{(B)} = p_i(t_A) \delta q_i^{(A)} ,$$

δηλαδή,

$$p_i(t_B) K_i(q(t_B), t_B) = p_i(t_A) \ K_i(q(t_A), t_A) \ .$$

[5] Ίσως αναρωτηθείτε ποιο φυσικό μέγεθος προσδιορίζει η $\partial S/\partial t$, όπου και πάλι η S είναι η συνάρτηση-δράση που αντιστοιχεί σε μια φυσική τροχιά που συνδέει κάποιο αρχικό σημείο με το σημείο $q_1, q_2, \ldots$ στον χρόνο t. Θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι $E = - \left. \partial S/\partial t \right|_p$, όπου E είναι η γενικευμένη ενέργεια του συστήματος. Μια ειδική περίπτωση της σχέσης αυτής, μεταξύ δράσης και ενέργειας, συναντήσαμε στο Πρόβλημα 5 του Κεφαλαίου 1.

Επειδή, όμως, οι χρόνοι t_A και t_B είναι αυθαίρετοι, το γινόμενο των γενικευμένων ορμών p_i επί τις μετατοπίσεις K_i θα διατηρείται κατά την κίνηση, δηλαδή θα είναι

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_i K_i(q,t) = 0 \ .$$

Οι μεταθέσεις K_i που δεν αλλοιώνουν τη δράση ονομάζονται *συμμετρίες* και θα αναλυθούν διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5.

Ως παράδειγμα τέτοιας συμμετρίας ας θεωρήσουμε τη δράση που προκύπτει από τη φυσική κίνηση ενός ελεύθερου σωματιδίου σε μία διάσταση

$$S = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

Είναι προφανές ότι μια μετάθεση της τροχιάς $x' = x + 1$ δεν μεταβάλλει τη δράση (είναι συμμετρία). Συνεπώς, η ορμή του σωματιδίου διατηρείται κατά την κίνηση.

Στη συνέχεια, θα γενικεύσουμε την έννοια της ενέργειας. Θα δείξουμε κατ' αρχάς ότι, όταν η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο και είναι συνάρτηση μόνο των θέσεων και των γενικευμένων ταχυτήτων, δηλαδή είναι $L(q,\dot{q})$, κατά τη φυσική κίνηση διατηρείται η ποσότητα

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q,\dot{q}) \ . \tag{2.32}$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *ολοκλήρωμα του Jacobi* και αποτελεί τη γενίκευση της έννοιας της ενέργειας. Όταν, λοιπόν, η Λαγκρανζιανή δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, η γενικευμένη ενέργεια (2.32) διατηρείται κατά τη φυσική κίνηση.

Απόδειξη: Υπολογίζουμε τη χρονική μεταβολή της ποσότητας E όταν τα q εξελίσσονται σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \ .$$

Πράγματι, η ποσότητα E διατηρείται (είναι, όπως λέγεται, ένα ολοκλήρωμα της κίνησης) διότι

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = 0 \ .$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση ενός δυναμικού $V(x,y,z)$ η γενικευμένη ενέργεια δεν είναι άλλη από τη γνωστή έκφραση της ενέργειας. Σε αυτή την περίπτωση η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x,y,z) \ .$$

Επειδή η λαγκρανζιανή συνάρτηση δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση, διατηρείται κατά την κίνηση η ποσότητα της έκφρασης (2.32)

$$\begin{aligned} E &= \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + V(x, y, z) \ , \end{aligned}$$

η οποία είναι η γνωστή μας έκφραση για την ολική ενέργεια του σωματιδίου.

2.4 Η δεύτερης τάξης μεταβολή της δράσης

Έως αυτό το σημείο της μελέτης μας έχουμε προσδιορίσει τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται για να καθίσταται η δράση στάσιμη. Δεν έχουμε προσδιορίσει, όμως, αν η φυσική διαδρομή καθιστά τη δράση ελάχιστη, μέγιστη ή τίποτε από τα δύο. Για να απαντήσουμε σε τούτο το ερώτημα, πρέπει να θεωρήσουμε τη μεταβολή της δράσης σε προσέγγιση δεύτερης τάξης ως προς τη μεταβολή, όπως για παράδειγμα, αν θέλουμε να μάθουμε το είδος του ακροτάτου μιας συνάρτησης, πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στη θέση του ακροτάτου. Εάν q είναι η φυσική τροχιά που ικανοποιεί την εξίσωση Euler - Lagrange, τότε η μεταβολή της δράσης δS που αντιστοιχεί σε μεταβολή της τροχιάς $\epsilon\eta(t)$ θα είναι

Ανάπτυξη της δράσης σε δεύτερη τάξη ως προς την παρέκκλιση

$$\delta S = \frac{\epsilon^2}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(L_{\dot{q}\dot{q}}\dot{\eta}^2 + 2L_{\dot{q}q}\eta\dot{\eta} + L_{qq}\eta^2\right) dt + \mathcal{O}(\epsilon^3) \ . \tag{2.33}$$

Η μεταβολή της διαδρομής που έχουμε θεωρήσει είναι και πάλι τέτοια ώστε να αφήνει τις αρχικές και τελικές θέσεις αμετάβλητες ($\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$). Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις παραγώγους της Λαγκρανζιανής

$$L_{\dot{q}\dot{q}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \ , \ L_{\dot{q}q} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q} \ , \ L_{qq} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \ .$$

Η σχέση (2.33) προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor της Λαγκρανζιανής $L(q + \epsilon\eta, \dot{q} + \epsilon\dot{\eta}, t)$ σε δεύτερη τάξη ως προς ϵ. Ο όρος πρώτης τάξης είναι φυσικά μηδέν, αφού υποθέσαμε ότι η q είναι η φυσική τροχιά. Με μια ολοκλήρωση κατά μέρη του μικτού όρου $\eta\dot{\eta}$ συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή της δράσης μπορεί να γραφεί γενικά ως

$$\delta S = \frac{\epsilon^2}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot{\eta}^2 - Q\eta^2\right) dt + \mathcal{O}(\epsilon^3) \ , \tag{2.34}$$

όπου οι συναρτήσεις $P(t)$ και $Q(t)$ έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$P(t) = L_{\dot{q}\dot{q}} \ , \ Q(t) = -L_{qq} + \frac{d}{dt}L_{\dot{q}q} \ . \tag{2.35}$$

Οι συναρτήσεις $P(t)$ και $Q(t)$ είναι αμιγώς χρονικές συναρτήσεις, διότι έχουν υπολογιστεί στη φυσική τροχιά $q(t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση Euler - Lagrange.

Άσκηση 2.3. *Αποδείξτε ότι πράγματι η δεύτερη μεταβολή της δράσης δίνεται από την (2.34) μέσω των συναρτήσεων $P(t)$ και $Q(t)$ της (2.35).*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Το κριτήριο για να είναι η φυσική τροχιά τοπικό ελάχιστο

Είμαστε, τώρα πια, σε θέση να προσδιορίσουμε το είδος του ακροτάτου της δράσης. Η φυσική τροχιά οδηγεί τη δράση σε τοπικό ελάχιστο, αν για όλες τις επιτρεπτές μεταβολές η που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ ισχύει

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(P\dot{\eta}^2 - Q\eta^2\right) dt > 0 \, . \tag{2.36}$$

Αν το ολοκλήρωμα αυτό είναι πάντοτε αρνητικό, τότε η φυσική τροχιά καθιστά τη δράση μέγιστη, ενώ, αν το πρόσημο του ολοκληρώματος εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης η, η φυσική τροχιά αποτελεί *σαγματική* συνάρτηση, δηλαδή για άλλου τύπου παρεκκλίσεις από τη φυσική τροχιά η δράση μεγαλώνει, ενώ για άλλες μικραίνει.

Το κατά πόσο, λοιπόν, η φυσική τροχιά καθιστά ελάχιστη τη δράση σχετίζεται άμεσα με το πρόσημο του ολοκληρώματος (2.36). Η εξέταση του προσήμου είναι γενικά μια δύσκολη υπόθεση· το πρόσημο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαρτάται από το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$. Ωστόσο, ο μαθηματικός Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή [1873-1950] απέδειξε ότι για αρκούντως μικρά χρονικά διαστήματα η δράση είναι ελάχιστη. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού για φυσικά προβλήματα η συνάρτηση P, όντας η γενικευμένη μάζα, είναι πάντοτε θετική. Αφού η συνάρτηση η οφείλει να είναι μηδέν στα άκρα του χρονικού διαστήματος, η $\dot{\eta}^2$ γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη από την η^2 όσο το χρονικό διάστημα Δt μικραίνει, οπότε ο πρώτος όρος της ολοκληρωτέας ποσότητας στη σχέση (2.36) για αρκούντως μικρό Δt θα υπερισχύσει και το ολοκλήρωμα θα γίνει θετικό. Το θεώρημα Καραθεοδωρή μπορεί να αποδειχθεί πιο αυστηρά μέσω της ανισότητας του Jules Henri Poincaré [1854-1912]

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}^2 dt > \frac{\pi^2}{(t_2 - t_1)^2} \int_{t_1}^{t_2} \eta^2 dt \, , \tag{2.37}$$

η οποία συνδέει τις τιμές της παραγώγου μιας συνάρτησης που μηδενίζεται στα άκρα ενός διαστήματος με τις τιμές της συνάρτησης στο διάστημα αυ-τό. Την ανισότητα αυτή την αποδεικνύουμε με τη μέθοδο του πηλίκου Rayleigh στο Μαθηματικό Παράρτημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.4. *Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Poincaré (2.37), το θεώρημα Καραθεοδωρή, δηλαδή ότι, αν $P(t) > 0$, η φυσική τροχιά καθιστά τη δράση ελάχιστη για αρκούντως μικρά $t_2 - t_1$. [Υπόδειξη: Αναπτύξτε το P σε σειρά Taylor γύρω από το μέσο του χρονικού διαστήματος και δείξτε ότι για $\Delta t \to 0$ η ανισότητα (2.36) ικανοποιείται.]*

Στο Μαθηματικό Παράρτημα του βιβλίου παρουσιάζεται, επίσης, ο τρόπος προσδιορισμού των συνθηκών που καθιστούν τη δράση ελάχιστη. Ε-δώ εμείς θα αρκεστούμε να αναφέρουμε ότι η αναγκαία συνθήκη για να είναι η φυσική τροχιά ελάχιστη είναι $P(t) > 0$ σε κάθε σημείο του διαστήματος $[t_1, t_2]$. Διότι, αν η $P(t)$ λάμβανε αρνητικές τιμές σε κάποια περιοχή $D = [t_1', t_2']$, θα αρκούσε η συνάρτηση $\eta(t)$ να είναι μη μηδενική σε ένα μικρό μόνο διάστημα $D_1 \subset D$ της περιοχής αυτής, πλάτους δt, για να καταστεί η δεύτερη μεταβολή της δράσης αρνητική. Επιλέγοντας το δt αρκούντως μικρό, μπορούμε να καταστήσουμε, βάσει της ανισότητας του Poincaré, τον πρώτο όρο της σχέσης (2.34) κυρίαρχο και μάλιστα αρνητικό. Η αναγκαία συνθήκη $P(t) > 0$ για να είναι η τροχιά ελάχιστη λέγεται *συνθήκη Legendre* και ικανοποιείται πάντοτε στα μηχανικά προβλήματα, αφού η συνάρτηση P είναι η γενικευμένη μάζα που εισέρχεται στην έκφραση της κινητικής ενέργειας, η οποία με τη σειρά της είναι πάντοτε θετική ποσότητα. Ωστόσο, η συνθήκη αυτή δεν είναι ικανή να καταστήσει τη φυσική τροχιά ελάχιστη. Τούτο θα φανεί στο παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή που θα αναλύσουμε στη συνέχεια, προκειμένου να δείξουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει κανείς στην προσπάθειά του να προσδιορίσει το πρόσημο του ολοκληρώματος της (2.36).

$P(t) > 0$: αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να είναι η δράση ελάχιστη

Ο αρμονικός ταλαντωτής ως παράδειγμα εξέτασης του προσήμου της δεύτερης μεταβολής συναρτησοειδούς

Ο αρμονικός ταλαντωτής σε μια διάσταση διέπεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \ .$$

Ας θεωρήσουμε τη φυσική τροχιά του ταλαντωτή από το $t_1 = 0$ στο $t_2 = T$. Το είδος του ακροτάτου της δράσης κρίνεται από το πρόσημο της (2.36), η οποία στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2\right) dt \ . \tag{2.38}$$

Από την ανισότητα Poincaré παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της (2.38) ικανοποιεί την ανισότητα

$$\int_0^T \dot{\eta}^2 dt \geq \frac{\pi^2}{T^2} \int_0^T \eta^2 dt \ ,$$

και συνεπώς ισχύει ότι

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2\right) dt \geq \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2\right) \int_0^T \eta^2 dt \ .$$

Επειδή το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μια θετική ποσότητα, η δεύτερη μεταβολή της δράσης θα είναι πάντοτε θετική εφόσον

$$T < \frac{\pi}{\omega} .$$

Αυτό σημαίνει ότι, αφού το χρονικό διάστημα T στο οποίο πραγματοποιείται η κίνηση είναι μικρότερο από μία ημιπερίοδο, η φυσική τροχιά ελαχιστοποιεί τη δράση. Τι συμβαίνει, όμως, όταν το διάστημα T είναι μεγαλύτερο από μία ημιπερίοδο; Θα δείξουμε αμέσως παρακάτω ότι σε αυτή την περίπτωση η φυσική τροχιά δεν ελαχιστοποιεί τη δράση. Αρκεί να βρούμε κάποια μεταβολή, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $\eta(0) = \eta(T) = 0$ και συγχρόνως καθιστά τη δεύτερη μεταβολή της δράσης αρνητική. Επιλέγουμε τη μεταβολή

$$\eta = \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) ,$$

η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Η (2.38), τότε, λαμβάνει την τιμή

$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2\right) dt = \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \omega^2\right) \frac{T}{2} ,$$

η οποία είναι αρνητική δεδομένου ότι $T > \pi/\omega$. Συνεπώς, η φυσική τροχιά, όταν αντιστοιχεί σε διάστημα κίνησης μεγαλύτερο από μία ημιπερίοδο, δεν καθιστά τη δράση ελάχιστη. Μήπως, όμως, σε αυτή την περίπτωση η φυσική διαδρομή καθιστά τη δράση μέγιστη; Αν θεωρήσουμε τη μεταβολή

$$\eta = \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) ,$$

όπου n ακέραιος, η ποσότητα (2.38) λαμβάνει την τιμή

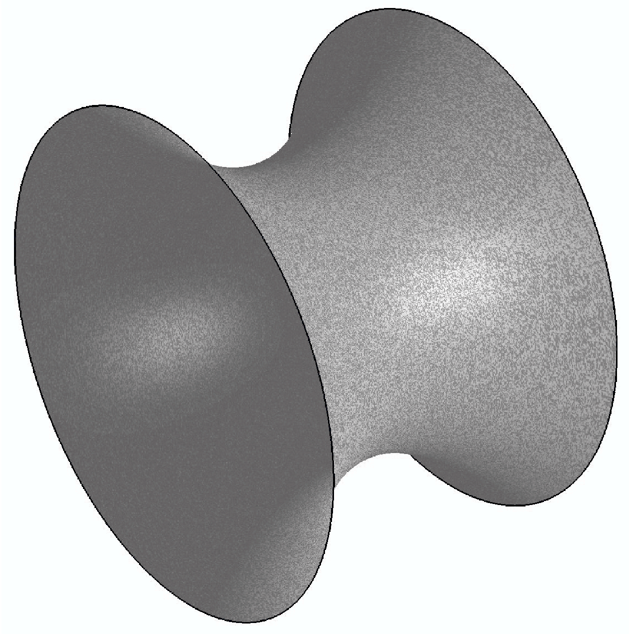
$$\int_0^T \left(\dot{\eta}^2 - \omega^2 \eta^2\right) dt = \left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right) \frac{T}{2} .$$

Για $n > \omega T/\pi$ (το T δεν είναι η περείοδος του ταλαντωτή) η παραπάνω ποσότητα είναι θετική. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για τέτοιες τιμές του T η τροχιά δεν καθιστά τη δράση ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη· είναι απλώς σαγματικό "σημείο"[6] της δράσης.

2.5 Το σχήμα ενός υμενίου σαπωνοδιαλύματος που συνδέει δύο δακτυλίους

Σχηματίζουμε μια σαπουνόφουσκα που καλύπτει το διάκενο μεταξύ των κυκλικών άκρων δύο ομοαξονικών σωλήνων ακτίνας r, τα οποία απέχουν απόσταση l το ένα από το άλλο. Η σαπουνόφουσκα είναι ένα υμένιο διαλύματος σαπουνιού μικροσκοπικού πάχους, της τάξης των 0.0001

[6] Η δράση ως συναρτησοειδές των δυνατών διαδρομών μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού το χώρο των συναρτήσεων. Έτσι μια συγκεκριμένη διαδρομή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της δράσης.



Σχήμα 2.6: Το σχήμα που αποκτά ένα υμένιο σαπωνοδιαλύματος το οποίο συνδέει δύο παράλληλους κυκλικούς δακτυλίους ίδιας ακτίνας.

cm,[7] που συμπεριφέρεται ως μια μεμβράνη υπό σταθερή τάση. Καθώς μεγαλώνει η επιφάνεια της σαπουνόφουσκας, καταναλώνεται έργο με αποτέλεσμα η επιφανειακή ενέργεια της σαπουνόφουσκας να είναι

$$E = \sigma S \ ,$$

όπου σ είναι ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης (για μια σαπουνόφουσκα είναι $\sigma \approx 7.4 \times 10^{-2}$ J/m^2). Φανταστείτε ότι χαράσσουμε στην επιφάνεια της σαπουνόφουσκας μια νοητή, κλειστή καμπύλη γ. Εξαιτίας της επιφανειακής τάσης θα ασκηθεί στη σαπουνόφουσκα μια δύναμη εφαπτομενική στην επιφάνειά της και κάθετη στην καμπύλη σε κάθε σημείο αυτής. Η δύναμη αυτή έχει την τάση να συρρικνώσει την επιφάνεια που περικλείεται από την καμπύλη, ενώ η τιμή της ανά μονάδα μήκους της περιβάλλουσας καμπύλης, τ, αποδεικνύεται ότι είναι ακριβώς ο συντελεστής της επιφανειακής τάσης σ (τώρα σε μονάδες N/m). Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε υπολογίζοντας τη διαφορική μεταβολή της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη. Εάν η επιφάνεια αυτή τεντωθεί έτσι ώστε να επεκταθεί κατά δn στην κατεύθυνση της καθέτου σε κάθε σημείο της καμπύλης, τότε η μεταβολή της επιφανειακής ενέργειας θα είναι

$$\delta E = -\delta W = \oint_\gamma \tau ds \delta n \ ,$$

όπου δW είναι το έργο των ασκούμενων στην επιφάνεια δυνάμεων. Επειδή η τάση είναι σταθερή σε κάθε σημείο της καμπύλης και το $\oint_\gamma ds\delta n$ ισούται με τη μεταβολή της επιφάνειας δS, συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή της

[7]Πρόκειται για ένα από τα μικρότερης διάστασης αντικείμενα που μπορούμε να διακρίνουμε με γυμνό μάτι.

επιφανειακής ενέργειας είναι

$$\delta E = \tau \delta S \ ,$$

οπότε η επιφανειακή τάση τ (η δύναμη ανά μονάδα μήκους) είναι ίση με το συντελεστή επιφανειακής τάσης σ.

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε το σχήμα της σαπουνόφουσκας όταν αυτή βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Απαιτούμε το συνολικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στην επιφάνεια της σαπουνόφουσκας να μηδενίζεται. Τη δύναμη της βαρύτητα τη θεωρούμε αμελητέα αφού είναι περί τις τέσσερις τάξεις μεγέθους μικρότερη από τις επιφανειακές δυνάμεις, οπότε σε κάθε διαφορικό τμήμα της σαπουνόφουσκας η κάθετη στην επιφάνεια συνισταμένη των τάσεων $dF_\perp$ που ασκούνται σε αυτή, πρέπει να εξισορροπείται από τη δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας εξαιτίας της διαφοράς της ατμοσφαιρικής πίεσης Δp μεταξύ των δύο πλευρών της σαπουνόφουσκας. Για μία επιφάνεια, δηλαδή, διαφορικού εμβαδού dA ισχύει

$$\frac{dF_\perp}{dA} = \Delta p \ .$$

Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια την κάθετη συνισταμένη των τάσεων $dF_\perp$ που ασκούνται σε μια διαφορική επιφάνεια $dA = ds_1 ds_2$, οι πλευρές ds_1, ds_2 της οποίας είναι απειροστά τόξα κατά μήκος των κάθετων μεταξύ τους κύριων κύκλων καμπυλότητας της επιφάνειας[8] (βλ. Σχήμα 2.7). Τα τόξα αυτά είναι $ds_1 = R_1 d\phi_1$ και $ds_2 = R_2 d\phi_2$, όπου R_1, R_2 είναι οι ακτίνες των αντίστοιχων κύκλων. Ας θεωρήσουμε τις δύο πλευρές του συνόρου της επιφάνειας που εχουν μήκος ds_2. Η επιφανειακή τάση είναι κάθετη σε αυτές τις πλευρές –συνεπώς είναι εφαπτόμενη στον κύκλο καμπυλότητας με ακτίνα R_1– και έχει μέτρο σds_2. Με απλή γεωμετρική ανάλυση υπολογίζουμε τη συνισταμένη αυτών των δυνάμεων κάθετα στην επιφάνεια.

$$dF_\perp^{(ds_2)} = 2\sigma ds_2 \frac{d\phi_1}{2} = \sigma ds_2 \frac{ds_1}{R_1} \ .$$

Ομοίως, η συνισταμένη των τάσεων που ασκούνται στις πλευρές μήκους ds_1 είναι

$$dF_\perp^{(ds_1)} = 2\sigma ds_1 \frac{d\phi_2}{2} = \sigma ds_1 \frac{ds_2}{R_2} \ ,$$

και η συνολική κάθετη στην επιφάνεια δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι

$$\frac{dF_\perp}{dA} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \ .$$

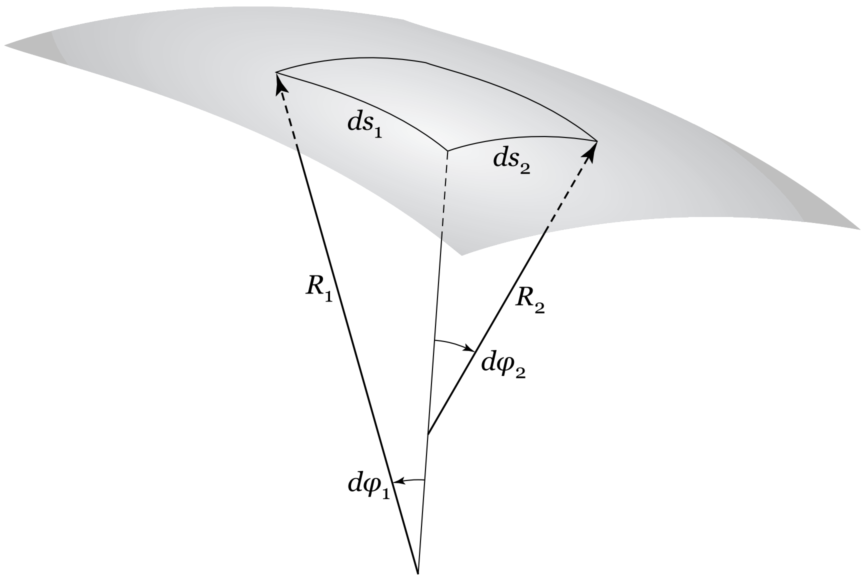
[8] Αποδεικνύεται ότι για κάθε ομαλή δισδιάστατη επιφάνεια, υπάρχουν σε κάθε σημείο αυτής δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις εφαπτομενικές στην επιφάνεια, τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας να αποτελούν ακρότατα όλων των δυνατών ακτίνων καμπυλότητας της επιφάνειας στο σημείο αυτό. Οι ακτίνες καμπυλότητας στις διευθύνσεις αυτές ονομάζονται κύριες ακτίνες καμπυλότητας της επιφάνειας στο εν λόγω σημείο.

΄Υστερα από αυτή την ανάλυση συνάγουμε ότι η επιφάνεια της σαπουνόφουσκας όταν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση του Pierre Simon Laplace [1749-1827]

Μια σαπουνόφουσκα σε κατάσταση ισορροπίας

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) , \tag{2.39}$$

όπου Δp είναι η διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο πλευρών της σαπουνόφουσκας. Στην παραπάνω έκφραση οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας μπορεί να έχουν θετικό ή αρνητικό πρόσημο· αντίθετα πρόσημα έχουν όταν οι κύριοι κύκλοι καμπυλότητας βρίσκονται εκατέρωθεν της επιφάνειας, όπως συμβαίνει σε ένα σάγμα.



Σχήμα 2.7: Οι δυνάμεις που ασκούνται λόγω επιφανειακής τάσης σε ένα στοιχειώδες παραλληλόγραμμο του υμενίου μιας σαπουνόφουσκας είναι εφαπτομενικές στην επιφάνεια και είναι κάθετες στο σύνορο αυτής. Τα δύο τόξα των κύριων κύκλων που αποτελούν το σύνορο του παραλληλογράμμου είναι με τη σειρά τους σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα. Η συνολική δύναμη $dF_\perp$ που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια είναι το διανυσματικό άθροισμα των τεσσάρων δυνάμεων.

Στο πρόβλημα της σαπουνόφουσκας που σχηματίζεται μεταξύ δύο ανοικτών δακτυλίων δεν υπάρχει διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο πλευρές της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας και ως εκ τούτου η επιφάνεια που αναζητούμε έχει την εξής ιδιότητα: οι κύριες ακτίνες καμπυλότητας σε κάθε σημείο της ικανοποιούν τη σχέση

$$R_1 = -R_2 .$$

Αυτή είναι και η συνθήκη ισορροπίας που πρέπει να ικανοποιεί η σαπουνόφουσκα.

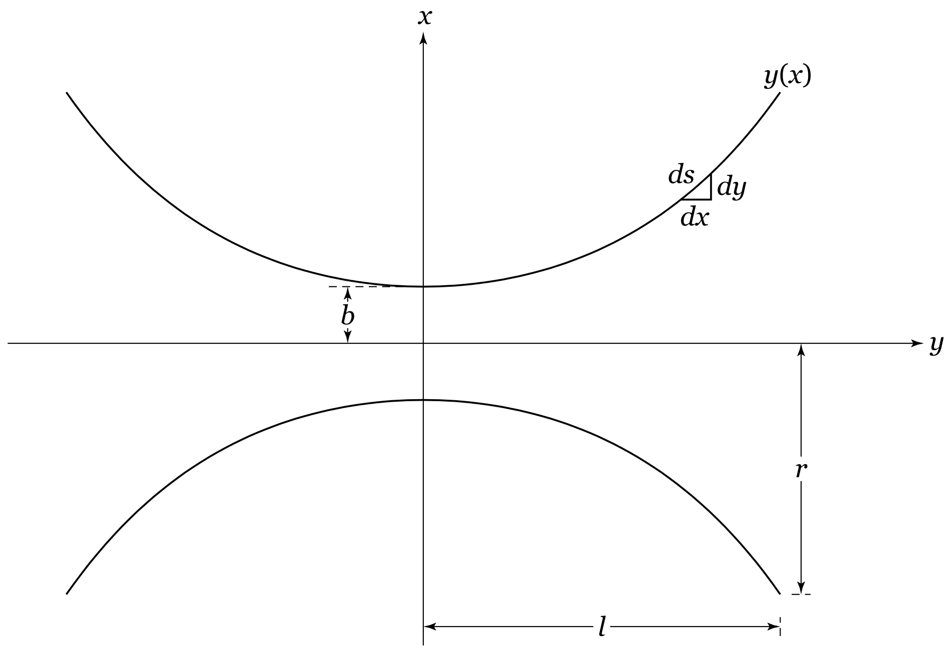
Υπάρχει ένας άλλος, όμως, ισοδύναμος χαρακτηρισμός της συνθήκης ισορροπίας της σαπουνόφουσκας, ο οποίος σχετίζεται άμεσα με το πρόβλημα στασιμοποίησης ενός συναρτησοειδούς που εξετάζουμε στο παρόν κεφάλαιο. Η σαπουνόφουσκα ισορροπεί, όταν η επιφανειακή ενέργειά

Μια σαπουνόφουσκα έχει το μικρότερο δυνατό εμβαδόν της καθίσταται στάσιμη και, άρα, όταν το εμβαδόν της επιφάνειάς της καθίσταται στάσιμο. Η κατάσταση ισορροπίας της σαπουνόφουσκας είναι ευσταθής όταν το εμβαδόν της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας είναι τοπικό ελάχιστο. Αυτός ο προσδιορισμός του σχήματος ισορροπίας της σαπουνόφουσκας θέτει ένα καινούργιο πρόβλημα μεταβολών. Το πρόβλημα προσδιορισμού της επιφάνειας που δημιουργείται μεταξύ δύο δοσμένων δακτυλίων και παρουσιάζει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

Οι υπολογισμοί σ' αυτό το πρόβλημα είναι πολύπλοκοι, αλλά μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά αν παρατηρήσουμε ότι η ελάχιστη επιφάνεια πρέπει να έχει κυλινδρική συμμετρία ως προς τον άξονα x που συνδέει τα κέντρα των δακτυλίων. Τότε η επιφάνεια μπορεί να προσδιοριστεί μόνο από μία συνάρτηση μιας μεταβλητής, την $y(x)$, όπου y η ακτίνα της επιφάνειας σε απόσταση x από το μέσο μεταξύ των κέντρων των δύο δακτυλίων. Αν συμβολίσουμε με ds το διαφορικό μήκος τόξου επί της $y(x)$, τότε η διαφορική επιφάνεια εκ περιστροφής που σχηματίζεται από αυτό το μήκος τόξου είναι

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

όπου με y' έχουμε συμβολίσει την παράγωγο dy/dx. Θέλουμε να προσδι-



Σχήμα 2.8: Η τομή μιας σαπουνόφουσκας που σχηματίζεται μεταξύ δύο ανοικτών δακτυλίων ακτίνας r που βρίσκονται σε απόσταση $2l$ ο ένας από τον άλλο. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ αντιδιαμετρικών σημείων της επιφάνειας είναι $2b$.

ορίσουμε την καμπύλη $y(x)$ με συνοριακές συνθήκες $y(\pm l) = r$ που καθιστά την ποσότητα

$$S = 2\pi \int_{-l}^{l} y\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

ελάχιστη. Αυτό είναι ένα πρόβλημα λογισμού μεταβολών με "Λαγκρανζιανή" την

$$L(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}\ .$$

Η εξίσωση Euler - Lagrange που πρέπει να ικανοποιείται από τη συνάρτηση $y(x)$, η οποία παράγει τη στάσιμη αυτή καμπύλη είναι η

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} ,$$

που οδηγεί στη διαφορική εξίσωση

$$yy'' = 1 + (y')^2 . \tag{2.40}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$-\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} + \frac{1}{y[1+(y')^2]^{1/2}} = 0$$

και να αναγνωριστεί ως η συνθήκη ισορροπίας που προκύπτει από τη σχέση του Laplace (2.39), αφού η επιφάνεια εκ περιστροφής $y(x)$ έχει ως πρώτη κύρια ακτίνα καμπυλότητας την

$$R_1 = y[1+(y')^2]^{1/2},$$

η οποία αντιστοιχεί σε κύκλο που διαγράφεται στο επίπεδο το κάθετο στην εφαπτομένη της καμπύλης $y(x)$ και ως δεύτερη ακτίνα καμπυλότητας την

$$R_2 = -\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''},$$

η οποία είναι η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης $y(x)$ και λαμβάνεται ως αρνητική, διότι κείται στην άλλη πλευρά της επιφάνειας, εφόσον η $y(x)$ είναι κυρτή.

Ξαναγράφοντας τη διαφορική εξίσωση (2.40) ως

$$\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y} ,$$

μαντεύουμε σχετικά εύκολα ότι η λύση της θα είναι της μορφής

$$y(x) = b\cosh(x/b + c) .$$

Επιπλέον, λόγω της συμμετρικής συνθήκης $y(\pm l) = r$, θα πρέπει $c = 0$ και συνεπώς η λύση της (2.40) θα έχει τη συμμετρική μορφή

Το σχήμα του υμενίου που ενώνει δύο δακτυλίους

$$y(x) = b\cosh(x/b) . \tag{2.41}$$

Η σταθερά b που δίνει την ακτίνα της επιφάνειας στο σημείο $x = 0$ προσδιορίζεται από τη συνθήκη

$$r/b = \cosh(l/b) . \tag{2.42}$$

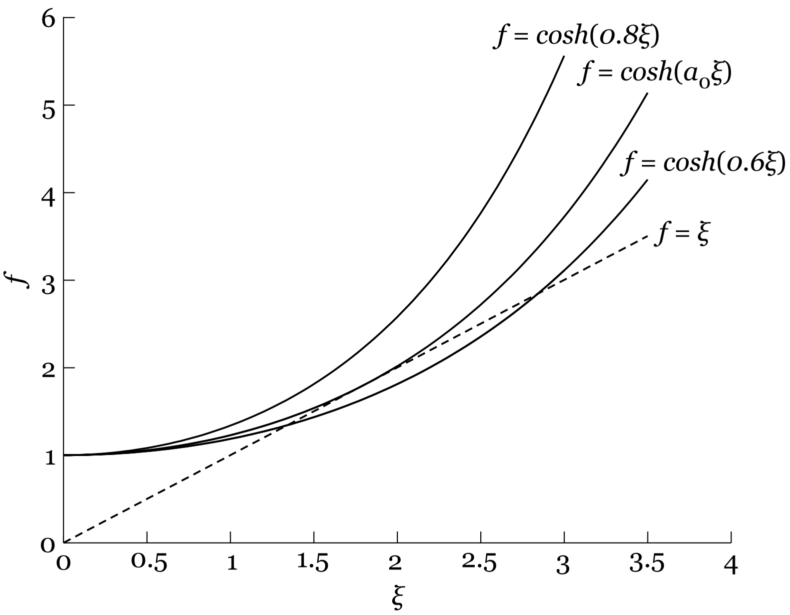
Αν ορίσουμε τις αδιάστατες ποσότητες $a = l/r$ και $\xi = r/b$, η (2.42) γράφεται

$$\xi = \cosh(a\xi) . \tag{2.43}$$

Στο Σχήμα 2.9 έχουν σχεδιαστεί τα δύο σκέλη της εξίσωσης (2.43) απ' όπου προκύπτει ένα ιδιόμορφο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του $a = l/r$ ($a \lesssim 0.66$), μικρές, δηλαδή, αποστάσεις των δακτυλίων σε σχέση με την ακτίνα τους, υπάρχουν δύο ρίζες της (2.43)· υπάρχουν, δηλαδή, δύο επιφάνειες που έχουν ακρότατο εμβαδόν. Αντίθετα, για μεγάλες τιμές του $a = l/r$ δεν υπάρχει λύση της (2.43)· δεν υπάρχει, δηλαδή, επιφάνεια της οποίας το εμβαδόν να καθίσταται ακρότατο. Η οριακή τιμή της παραμέτρου a_0, κατά την οποία οι δύο γραφικές παραστάσεις εφάπτονται, καθορίζεται πέραν της (2.43) από την επιπλέον συνθήκη

$$1 = a_0 \sinh(a_0 \xi_0) \ , \tag{2.44}$$

όπου ξ_0 η τιμή της ξ στο σημείο επαφής και a_0 η ειδική τιμή της παρα-



Σχήμα 2.9: Γραφική επίλυση της εξίσωσης (2.43). Όταν $a = l/r < 0.66$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις, ενώ, όταν $a > 0.66$, η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική λύση.

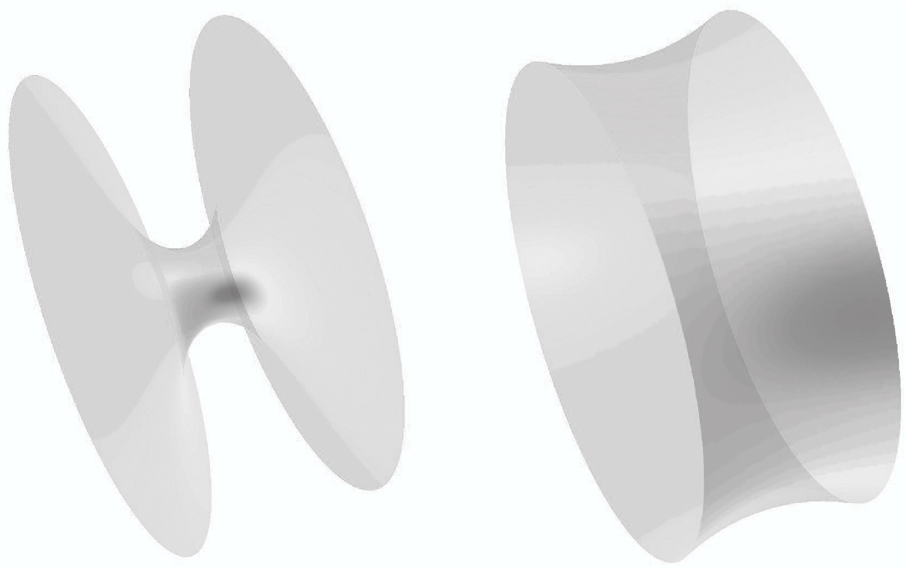
μέτρου που οδηγεί στην εφαπτομενική επαφή. Διαιρώντας τις (2.43) και (2.44) στην ειδική αυτή περίπτωση, λαμβάνουμε

$$a_0 \xi_0 \tanh(a_0 \xi_0) = 1 \ .$$

Η υπερβατική αυτή εξίσωση ικανοποιείται για $a_0 \xi_0 = 1.12$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, με αντικατάσταση στη σχέση (2.44) ότι η μέγιστη τιμή της παραμέτρου a για την οποία υπάρχει λύση στο πρόβλημά μας είναι η

$$a_0 = 0.66 \ ,$$

η οποία οδηγεί στην τιμή $\xi_0 = 1.81$. Όπως ήδη αναφέραμε, αν $a < a_0$, έχουμε δύο επιφάνειες με ακρότατο εμβαδόν. Οι επιφάνειες αυτές για $a = 0.4$ παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.10.

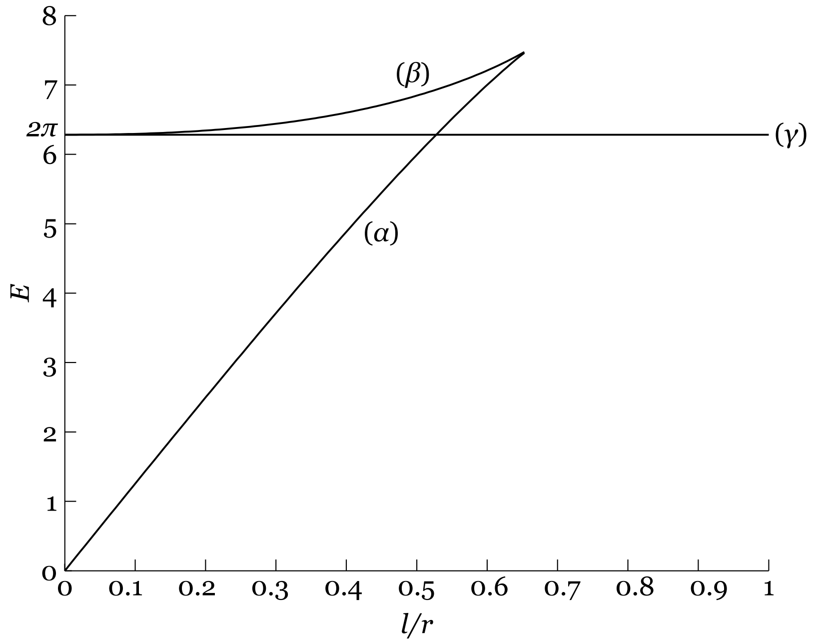


Σχήμα 2.10: Στο σχήμα παριστάνονται οι μορφές των δύο στάσιμων λύσεων για $a = l/r = 0.4$. Η αριστερή αντιστοιχεί σε τιμή $b/r = 0.16$ (έντονα κυρτωμένη), ενώ η δεξιά σε $b/r = 0.91$ (ελαφρώς κυρτωμένη). Η αριστερή μορφή δεν δημιουργείται στην πραγματικότητα λόγω της αστάθειάς της.

Το εμβαδόν της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας S υπολογίζεται ότι είναι

$$\begin{aligned} S = 2\pi \int_{-l}^{l} y\sqrt{1+y'^2}dx &= 2\pi b \int_{-l}^{l} \cosh^2(x/b)dx \\ &= 2\pi b l \left(1 + \frac{\sinh(2l/b)}{(2l/b)}\right) , \end{aligned} \qquad (2.45)$$

και απεικονίζεται στο Σχήμα 2.11 ως συνάρτηση της αδιάστατης ποσότητας $a = l/r$. Η λύση με το μεγαλύτερο b (μικρότερο ξ), που αντιστοιχεί στην καμπύλη (α) (σαν τη δεξιά καμπύλη του σχήματος 2.10), έχει πάντοτε μικρότερη επιφάνεια από την άλλη λύση με το μικρότερο b (σαν την αριστερή επιφάνεια του σχήματος 2.10) που αντιστοιχεί στην καμπύλη (β). Θυμίζουμε ότι η παράμετρος b είναι η ακτίνα του στενότερου σημείου του λαιμού που σχηματίζει το υμένιο. Καθώς η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων μικραίνει ($a \to 0$), η στάσιμη λύση με το μικρότερο εμβαδόν προσεγγίζει μια κυλινδρική επιφάνεια με εμβαδόν $2\pi r l$ (βλ. Σχήμα 2.12). Η άλλη λύση με το μεγαλύτερο εμβαδόν (καμπύλη (β)) προσεγγίζει για $a \to 0$ την τιμή $2\pi r^2$ που αντιστοιχεί στο εμβαδόν δύο ξεχωριστών κυκλικών υμενίων επάνω στον κάθε δακτύλιο (βλ. Σχήμα 2.13). Στο Σχήμα 2.11 έχει σχεδιαστεί και το εμβαδόν της τοπολογικά διαφορετικής αυτής λύσης, η οποία, μολονότι δεν προκύπτει ως λύση της Euler - Lagrange, όντας μη συνεχής, έχει μικρότερη επιφάνεια από τη στάσιμη λύση με το μικρότερο εμβαδόν για $a > 0.53$. Αυτή η τοπολογικά μη συνεκτική λύση αποτελεί μια πιθανή κατάληξη της σαπουνόφουσκας, όταν αυτή γίνει ασταθής, πράγμα το οποίο συμβαίνει στην πράξη όταν η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων ξεπεράσει το ra_0. Κάνουμε λόγο για πιθανή κατάληξη της σαπουνόφουσκας, διότι υπάρχει και άλλη μια διαφορετική τοπολογική λύση με μηδε-

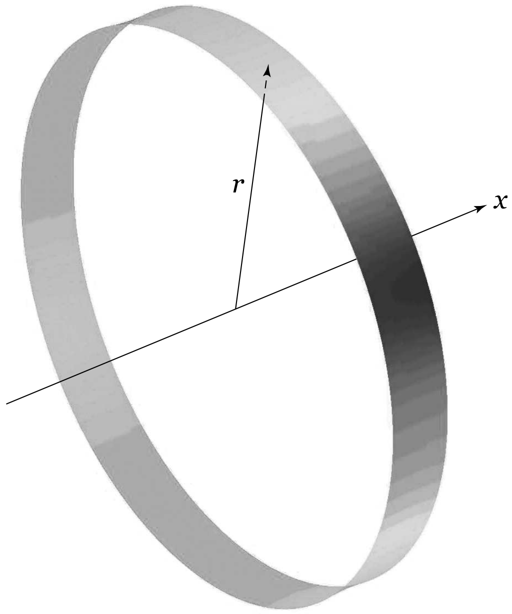


Σχήμα 2.11: Το εμβαδόν της επιφάνειας των διαφόρων στάσιμων λύσεων συναρτήσει του λόγου $a = l/r$. Για τιμές του λόγου $a > a_0 = 0.66$ δεν υπάρχει συνεχής λύση της εξίσωσης Euler - Lagrange. Για $a < 0.66$ η καμπύλη (α) αντιστοιχεί στη στάσιμη λύση με το μικρότερο εμβαδόν, ενώ η καμπύλη (β) σε εκείνη με το μεγαλύτερο εμβαδόν. Η καμπύλη (γ) αντιστοιχεί στο εμβαδόν $2\pi r^2$ δύο ξεχωριστών κυκλικών υμενίων ακτίνας r επάνω στον κάθε δακτύλιο. Η λύση αυτή, παρόλο που δεν προκύπτει από στασιμοποίηση της επιφάνειας, συμβαίνει να παρουσιάζει μικρότερο εμβαδόν ακόμη και από τη λύση της καμπύλης (α) για $a > 0.53$.

νικό εμβαδόν κατά την οποία το υγρό της σαπουνόφουσκας συγκεντρώνεται στην περιφέρεια των δακτυλίων χωρίς να σχηματίζεται κανένα υμένιο.

Περί της ευστάθειας του υμενίου

Ας ελέγξουμε τώρα την ευστάθεια αυτών των επιφανειών. Αν κάποια από τις παραπάνω επιφάνειες αποτελεί ελάχιστο μεταξύ των παραπλήσιων επιφανειών, τότε η οποιαδήποτε διαταραχή της σαπουνόφουσκας, όπως για παράδειγμα ένα τράνταγμα, θα επιφέρει αύξηση της επιφάνειάς της. Η σαπουνόφουσκα τότε, στην προσπάθειά της να μειώσει την επιφανειακή της ενέργεια, θα επανέλθει στην αρχική της αδιατάραχτη κατάσταση. Στην πραγματικότητα η σαπουνόφουσκα θα εκτελέσει κάποιες ταλαντώσεις γύρω από την επιφάνεια ισορροπίας της, εκπέμποντας την ενέργεια που προκλήθηκε από το τράνταγμα στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας. Αν, όμως, το σχήμα της σαπουνόφουσκας καθιστά την επιφάνεια στάσιμη, αλλά όχι τοπικό ελάχιστο, τότε το παραμικρό τράνταγμα θα προκαλέσει στη σαπουνόφουσκα μια παραμόρφωση, η οποία θα έχει την τάση να μεγαλώσει καθώς η σαπουνόφουσκα θα προσπαθεί να μικρύνει την επιφάνειά της. Αν, λοιπόν, υπάρχει λύση με μικρότερη επιφάνεια η σαπουνόφουσκα θα καταλήξει τελικά σε αυτήν. Προκειμένου να ελέγξουμε το είδος του ακροτάτου των λύσεων που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της δεύτερης μεταβολής της επιφάνειας. Αν παραγωγίσουμε το ολοκλήρωμα της



Σχήμα 2.12: Όταν η απόσταση μεταξύ των δακτυλίων είναι μικρή, η λύση με το μικρότερο εμβαδόν προσεγγίζει την παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου.

επιφάνειας δύο φορές ως προς μικρές διαταραχές της λύσης (2.41)

$$y(x) = b\cosh\left(\frac{x}{b}\right) + \epsilon\eta(x) \ ,$$

θα έχουμε

$$\delta S = \frac{\epsilon^2}{2}\int_{-\alpha\xi}^{\alpha\xi} dz \frac{1}{\cosh^2 z}\left[\left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 - \eta^2\right] \ . \tag{2.46}$$

Την παραπάνω έκφραση την κατασκευάσαμε ακολουθώντας τις γενικές εκφράσεις που γράψαμε στην αρχή του προηγούμενου εδαφίου όσον αφορά στον προσδιορισμό του προσήμου της δεύτερης μεταβολής ενός συναρτησοειδούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.5. *Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.35) για τις συναρτήσεις P, Q, κατασκευάστε τη δεύτερη παράγωγο της επιφάνειας της σαπουνόφουσκας γύρω από τη λύση (2.41) που στασιμοποιεί την επιφάνεια αυτή. Αλλάζοντας, τέλος, τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης από x σε $z = x/l$, δείξτε ότι η δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας δίνεται συνοπτικά από το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.46).*

Αν η διαφορά μεταξύ των δύο ολοκληρωμάτων, του ενός με τον όρο η'^2 και του άλλου με τον όρο η^2, είναι θετική για οποιαδήποτε συνάρτηση η, τότε η μεταβολή της επιφάνειας από την ακρότατη τιμή της είναι θετική και επομένως η επιφάνεια είναι ελάχιστη. Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυσή μας (θεώρημα Καραθεοδωρή) αυτό θα ισχύει σίγουρα για ένα πολύ μικρό διάστημα ολοκλήρωσης. Μικρό, σχεδόν μηδενικό διάστημα ολοκλήρωσης $[-\alpha\xi, \alpha\xi]$ μπορούμε να έχουμε στη μία μόνο από τις δύο λύσεις της (2.43), σε αυτή με τη μικρότερη ρίζα ξ_1, δηλαδή την πιο “ρηχή” καμπύλη. Η άλλη λύση, ξ_2, θα αντιστοιχεί σε τιμή του $a\xi$ μεγαλύτερη της $a_0\xi_0$, αφού, όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση στο Σχήμα 2.9, ισχύει ότι $\cosh(a\xi_2) \geq \cosh(a_0\xi_0)$. Θα δείξουμε ότι η ακραία λύση του προβλήματός μας με $a = a_0$ και $\xi = \xi_0$ έχει δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας θετική ή μηδέν. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση $\eta(z)$ το ολοκλήρωμα (2.46) είναι θετικό, ενώ υπάρχει μια συγκεκριμένη συνάρτηση η που καθιστά το ολοκλήρωμα αυτό μηδέν. Αν ακολουθήσουμε την ανάλυση του πηλίκου Rayleigh που παρουσιάζεται στο Μαθηματικό Παράρτημα, διαπιστώνουμε ότι ένας πολύ κομψός τρόπος προσδιορισμού του προσήμου του εν λόγω ολοκληρώματος είναι η μελέτη του πηλίκου των δύο ετερόσημων όρων της (2.46)

Το ρηχό υμένιο, σε αντίθεση με το βαθύ, είναι ευσταθές

$$R[\eta] = \frac{\int_{-a\xi}^{a\xi} \left(\eta'^2/\cosh^2 z\right) dz}{\int_{-a\xi}^{a\xi} \left(\eta^2/\cosh^2 z\right) dz} , \tag{2.47}$$

το οποίο ανάγεται (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα) στην εύρεση ιδιοτιμών του ακόλουθου προβλήματος Sturm-Liouville

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\cosh^2 z}\frac{d\eta(z)}{dz}\right) = \lambda \frac{1}{\cosh^2 z}\eta(z) , \tag{2.48}$$

με τον περιορισμό $\eta(\pm a\xi) = 0$. Ειδικά στην περίπτωση που $a\xi = a_0\xi_0$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $a_0\xi_0 \tanh(a_0\xi_0) = 1$ δεν είναι δύσκολο να μαντέψουμε την πιο απλή ιδιοσυνάρτηση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. Δοκιμάζοντας συναρτήσεις της μορφής

$$\eta_0(z) = (z \tanh z - 1) f(z) ,$$

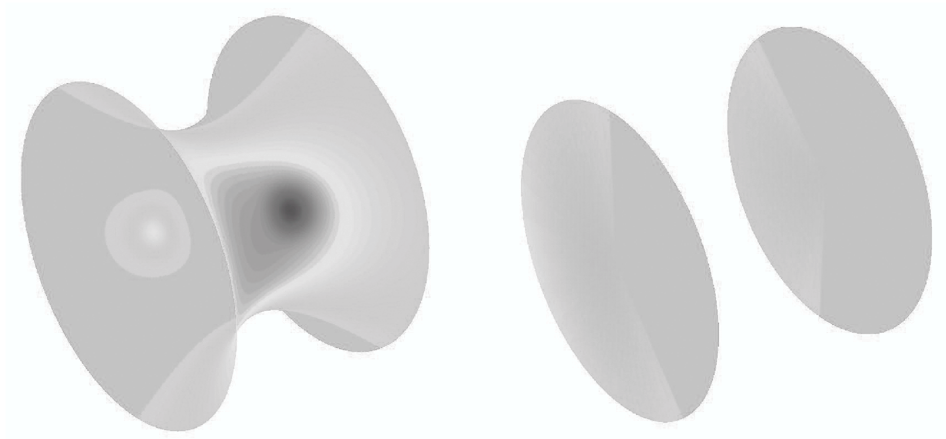
που ικανοποιούν τις ζητούμενες συνοριακές συνθήκες, συμπεραίνουμε ότι η απλούστερη ιδιοσυνάρτηση της (2.48) είναι η[9]

$$\eta_0(z) = (z \tanh z - 1) \cosh(z) . \tag{2.49}$$

Μιλώντας για απλούστερη ιδιοσυνάρτηση εννοούμε εκείνη που δεν έχει καμία ρίζα στο διάστημα που ορίζεται από τα σύνορά της. Από τη θεωρία Sturm-Liouville γνωρίζουμε ότι η απλούστερη τέτοια ιδιοσυνάρτηση θα αντιστοιχεί και στη μικρότερη ιδιοτιμή, που εδώ, όπως διαπιστώνει κανείς, είναι η $\lambda = 1$. Από τη θεωρία γνωρίζουμε επίσης ότι το πηλίκο Rayleigh είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τη μικρότερη δυνατή ιδιοτιμή της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης. Συνεπώς, η δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ των δακτυλίων είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν· είναι ίση με μηδέν όταν η $\eta(z)$ έχει τη

Η επιφάνεια που αντιστοιχεί στην ακραία τιμή $a = 0.66$ παρουσιάζει ουδέτερη ευστάθεια

[9]Για την ακρίβεια δεν χρειάζεται να καταβάλουμε ιδιαίτερη προσπάθεια. Η $f(z)$ πρέπει να είναι άρτια συνάρτηση και δεδομένων των υπερβολικών συναρτήσεων που παρουσιάζονται κατά κόρον στο πρόβλημά μας, η $\cosh z$ είναι η δεύτερη συνάρτηση που θα δοκίμαζε κανείς μετά τη σταθερή συνάρτηση.



Σχήμα 2.13: ΄Οταν η απόσταση των δύο δακτυλίων υπερβεί την τιμή $l/r = 0.66$, η ακραία δυνατή ευσταθής λύση (αριστερό διάγραμμα) σπάει και το σύστημα μεταβαίνει στην κοντινότερη ευσταθή λύση. Σχηματίζονται έτσι δύο κυκλικά υμένια ένα στον κάθε δακτύλιο. Για μεγάλα $a = l/r$ αυτή η μη συνεκτική λύση που δεν προκύπτει από τις εξισώσεις Euler - Lagrange αντιστοιχεί στην κατάσταση ελάχιστης επιφανειακής ενέργειας.

μορφή της (2.49). Η ακρότατη αυτή επιφάνεια παρουσιάζει δηλαδή ουδέτερη ευστάθεια, υπό την έννοια ότι όλες οι μεταβολές αυξάνουν την επιφάνεια πλην ορισμένων, αυτών της μορφής της ιδιοσυνάρτησης (2.49), οι οποίες αφήνουν το εμβαδόν σταθερό σε δεύτερη τάξη.

Για μικρότερα διαστήματα $[-a\xi_1, a\xi_1]$ με $0 < a\xi_1 < a_0\xi_0$ η δεύτερη μεταβολή της επιφάνειας είναι αμιγώς θετική αφού, τότε, μπορεί κανείς από τις ιδιοσυναρτήσεις της προηγούμενης περίπτωσης, οι οποίες έχουν όλες ιδιοτιμές μεγαλύτερες της μονάδας, να κατασκευάσει την απλούστερη λύση της εξίσωσης (2.48) η οποία θα υπακούει στις νέες συνοριακές συνθήκες. Αυτή η νέα συνάρτηση, όντας γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων του αρχικού προβλήματος, θα έχει ιδιοτιμή μεγαλύτερη από τη μικρότερη ιδιοτιμή του αρχικού προβλήματος.[10] Τούτο μπορεί να το διαπιστώσει κανείς βασιζόμενος στην ιδιότητα του πηλίκου Rayleigh που αναφέραμε παραπάνω, σύμφωνα με την οποία το πηλίκο Rayleigh είναι μεγαλύτερο από τη μικρότερη δυνατή ιδιοτιμή, η οποία, όπως δείξαμε, είναι η μονάδα. Αντίστοιχο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς για την περίπτωση που το διάστημα $[-a\xi_2, a\xi_2]$ είναι μεγαλύτερο από την οριακή περίπτωση ($a\xi_2 > a_0\xi_0$). Τότε, η απλούστερη ιδιοσυνάρτηση θα έχει ιδιοτιμή μικρότερη της μονάδας με αποτέλεσμα η δεύτερη μεταβολή να μπορεί να γίνει αρνητική. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν αρχικά η σαπουνόφουσκα είχε το σχήμα που αντιστοιχεί στη δεύτερη λύση (αυτή με το μεγαλύτερο εμβαδόν), η παραμικρή διαταραχή της επιφάνειάς της θα μεγάλωνε ακριβώς με τον τρόπο που αντιστοιχεί στην απλούστερη αυτή

[10] Η απαίτηση να μηδενίζεται η θεμελιώδης ιδιοσυνάρτηση του νέου προβλήματος στα διαστήματα $[-a_0\xi_0, -a\xi_1]$ και $[a\xi_1, a_0\xi_0]$ και η ασυνεχής μεταβολή της παραγώγου της συνάρτησης στα σημεία $\pm a\xi_1$, δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα. Ο λόγος είναι ότι η συμβολή στα ολοκληρώματα του πηλίκου Rayleigh (2.47) των ασυνεχών σημείων είναι μέτρου μηδέν και επομένως δεν αλλοιώνονται διόλου τα συμπεράσματά μας περί αύξησης της τιμής της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

ιδιοσυνάρτηση και τελικά η σαπουνόφουσκα θα κατέληγε στη λύση με τη μικρότερη συνολικά επιφάνεια (βλ. Σχήμα 2.11).

Τέλος, οποιαδήποτε απόπειρα να απομακρύνουμε τους δακτυλίους περισσότερο από την οριακή τιμή $a_0 = l_{\max}/r = 0.66$, για την οποία μόλις που υπάρχει, όπως δείξαμε, λύση τοπικά ελάχιστης επιφάνειας, θα προκαλέσει τέτοιες διαταραχές στη σαπουνόφουσκα, ώστε αυτή στην προσπάθειά της να μικρύνει την επιφάνειά της θα γίνεται ολοένα και πιο στενή στο "λαιμό" της. Τελικά η σαπουνόφουσκα θα καταλήξει στην τοπολογικά διαφορετική λύση των δύο ξεχωριστών υμενίων στους δύο δακτυλίους, η οποία αποτελεί λύση τοπικού ελαχίστου, ή θα διαλυθεί τελείως καταλήγοντας απλώς στην περιφέρεια των δύο δακτυλίων.

Αν οι δακτύλιοι απομακρυνθούν περισσότερο από 0.66 ακτίνες, το υμένιο σπάει

2.6 Προβλήματα

1. Γράψτε την έκφραση για το στοιχειώδες μήκος ενός τόξου σφαίρας με μοναδιαία ακτίνα, χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια, ορίστε το ολοκλήρωμα που περιγράφει το μήκος μιας τυχαίας διαδρομής που έχει αφετηρία το Βόρειο Πόλο ($\theta = 0, \phi = 0$) και καταλήγει σε ένα σημείο του Ισημερινού ($\theta = \pi/2, \phi = 0$). Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange, δείξτε ότι το μήκος της διαδρομής καθίσταται ακρότατο, όταν ϕ =σταθερό. Η συνθήκη αυτή συνεπάγεται δύο δυνατές διαδρομές: μία κατά μήκος του μεσημβρινού $\phi = 0$ απευθείας από το Βόρειο Πόλο προς τον Ισημερινό και μία κατά μήκος του ίδιου μεσημβρινού μέσω, όμως, του Νότιου Πόλου. Από τις δύο διαδρομές η πρώτη είναι ολικό ελάχιστο σε σχέση με κάθε άλλη δυνατή διαδρομή, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τη μορφή του ολοκληρώματος. Η δεύτερη διαδρομή είναι, άραγε, κάποιο τοπικό ελάχιστο; ΄Η μήπως μέγιστο; [Υπόδειξη: Ως εναλλακτική της δεύτερης διαδρομής θεωρήστε (α) μία διαδρομή που ακολουθεί έναν άλλο μεσημβρινό από το Βόρειο μέχρι το Νότιο Πόλο και συνεχίζει κατά μήκος του μεσημβρινού μέχρι το τελικό σημείο, (β) την αρχική μεγάλη διαδρομή αντικαθιστώντας όμως ένα πολύ μικρό τόξο αυτής (σχεδόν ευθύγραμμο τμήμα) με μια μικρή τεθλασμένη γραμμή και (γ) τη μεγαλύτερη από τις δύο τοξοειδείς κυκλικές διαδρομές που προκύπτουν, αν τμήσουμε τη σφαίρα με ένα επίπεδο που περιέχει το αρχικό και το τελικό σημείο και δεν διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, αλλά απέχει μικρή απόσταση από αυτό. Σκεφτείτε ότι ο κύκλος που προκύπτει από την τομή αυτή έχει περιφέρεια μικρότερη από έναν μέγιστο κύκλο της σφαίρας, ενώ παράλληλα το μικρότερο τόξο αυτού έχει μήκος μεγαλύτερο από το ένα τέταρτο του μέγιστου κύκλου, αφού αποτελεί μια παρέκκλιση από αυτό.]

2. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. Διατυπώστε κατόπιν τις εξισώσεις κίνησης. Επιβεβαιώστε από τις εξισώσεις αυτές ότι η κίνηση περιορίζεται σε ένα επίπεδο, το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί από τις αρχικές συνθήκες.

3. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2}e^{\gamma t/m}\left(m\dot{x}^2 - kx^2\right)$. Γράψτε την εξίσωση κίνησης και, αφού τη λύσετε, περιγράψτε την κίνηση για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει η Λαγκρανζιανή;

4. ΄Ενα φυσικό σύστημα περιγράφεται από τη μονοδιάστατη Λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q}, t)$. ΄Εστω, τώρα, μια νέα συντεταγμένη $q' = f(q, t)$. Η Λαγκρανζιανή του φυσικού συστήματος στη νέα συντεταγμένη θα είναι $L'(q', \dot{q}', t) = L'(f, \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}, t) = L(q, \dot{q}, t)$. Η τελευταία ισό-

τητα υπονοεί ίση τιμή των δύο συναρτήσεων L, L'. Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'}\right].$$

Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε όσον αφορά στην αναλλοιότητα των εξισώσεων Euler - Lagrange σε σημειακούς μετασχηματισμούς; Τι είδους μετασχηματισμοί είναι επιτρεπτοί για να παραμείνουν οι εξισώσεις Euler - Lagrange αναλλοίωτες;

5. Αν η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος δίνεται από μία συνάρτηση $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$, η αρχή του Hamilton γενικεύεται ως εξής: "Οι τροχιές του συστήματος στο χώρο των θέσεων του συστήματος $x(t)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $x(t_1) = x_1$ και $x(t_2) = x_2$, καθώς και $\dot{x}(t_1) = v_1$, $\dot{x}(t_2) = v_2$ (με $t_2 > t_1$) καθιστούν τη δράση

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) dt$$

ακρότατη". Γράψτε την εξίσωση κίνησης για το σύστημα αυτό (το αντίστοιχο της εξίσωσης Euler - Lagrange). Γενικεύστε το αποτέλεσμα για την περίπτωση που στη Λαγκρανζιανή υπεισέρχονται και παράγωγοι ακόμη μεγαλύτερης τάξης. Τι τάξης διαφορική εξίσωση είναι πάντοτε η εξίσωση κίνησης;

6. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη η ταχύτητα ενός κινητού είναι ανάλογη της δύναμης που ασκείται σε αυτό. Εξετάστε κατά πόσο είναι δυνατόν να προκύψει ένας τέτοιος δυναμικός νόμος από την αρχή του Χάμιλτον;

7. Η ταχύτητα διάδοσης του φωτός μέσα σε ένα υλικό με σφαιρικά συμμετρικό δείκτη διάθλασης $n(r)$ είναι $c/n(r)$. (α) Εάν το φως ακολουθεί τη διαδρομή που καθιστά στάσιμο το χρόνο μετάβασης από σημείο σε σημείο (αρχή Fermat), αποδείξτε ότι το φως ακολουθεί την τροχιά

$$\theta = \pm \int \frac{dr}{r\sqrt{(r\, n(r)/a)^2 - 1}} ,$$

όπου a μία σταθερά και (r, θ) οι πολικές συντεταγμένες της τροχιάς του φωτός (η κίνηση χωρίς έλλειψη της γενικότητας μπορεί να θεωρηθεί επίπεδη). (β) Θεωρήστε τώρα ότι ο δείκτης διάθλασης είναι της μορφής

$$n(r) = \sqrt{1 + \frac{\epsilon\, a^3}{r^3}} ,$$

με ϵ πολύ μικρό. (Σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, η κίνηση του φωτός είναι ισοδύναμη με την κλασική κίνηση σε ένα μέσο με μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης.) Υπολογίστε πρώτα τη γωνία στροφής του φωτός $\theta_0(r \to \infty)$, όταν $\epsilon = 0$. Είναι αναμενόμενο το αποτέλεσμα; [Υπόδειξη: Χωρίστε την ολοκλήρωση σε δύο μέρη· από $r = \infty$ μέχρι $r = r_{\min}$ και από $r = r_{\min}$ μέχρι $r = \infty$. Τα δύο ολοκληρώματα είναι ίδια. Ίσως σας βοηθήσει στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων η αντικατάσταση: $r = a/\cos\phi$.] (γ) Ποια είναι η φυσική σημασία της σταθεράς a; (δ) Υπολογίστε στη συνέχεια τη γωνία στροφής του φωτός για μια μικρή τιμή του ϵ και δείξτε ότι

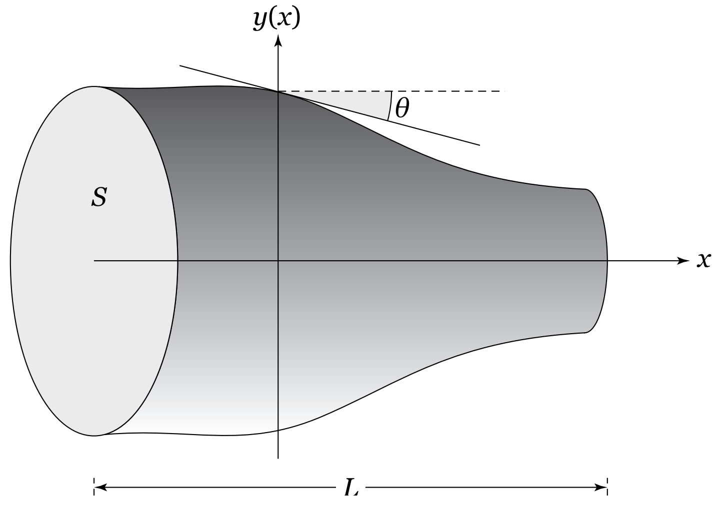
$$\theta_0(r \to \infty) = \pi + 2\epsilon \ .$$

[Υπόδειξη: Επαναλάβετε την προηγούμενη ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας ως νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης το $y = r\,n(r)/a$ και αντικαθιστώντας στην ολοκλήρωση τα r και dr με τις αντίστοιχες συναρτήσεις του y αναπτυγμένες ως προς ϵ. Κρατήστε στα αναπτύγματα όρους μόνο πρώτης τάξης ως προς ϵ. Στο τελικό ολοκλήρωμα ο ίδιος μετασχηματισμός που χρησιμοποιήσατε στο ερώτημα (β) είναι πάλι χρήσιμος.]

8. *Κατασκευή ενός βλήματος.* (α) Υπολογίστε την αντίσταση που δέχεται ένας κύλινδρος και μία σφαίρα ίδιας ακτίνας, όταν κινούνται με ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα συμμετρίας τους μέσα σε ένα αέριο. Υποθέστε ότι η αντίσταση είναι αποτέλεσμα της κρούσης των υποτιθέμενων ακίνητων μορίων του αερίου πάνω στην επιφάνεια του σώματος. (β) Αν το κινούμενο αντικείμενο είναι ένας κόλουρος κώνος με δεδομένη ακτίνα μεγάλης βάσης και δεδομένο ύψος, ο οποίος κινείται κατά μήκος του άξονά του, ποια είναι η κλίση της παράπλευρης επιφάνειας που οδηγεί στην ελάχιστη αντίσταση; Τι τιμή λαμβάνει αυτή η γωνία στο όριο που ο κώνος έχει απειροστό ύψος; (γ) Δείξτε ότι ένα αξονικά συμμετρικό στερεό σώμα (βλ. Σχήμα), δοσμένης διατομής S και μήκους L (κατά τον άξονα συμμετρίας), παρουσιάζει το πιο αεροδυναμικό σχήμα όταν η καμπύλη, η οποία παράγει εκ περιστροφής το στερεό, είναι η ακόλουθη:

$$y \cos\theta \sin^3\theta = \text{σταθερό}$$

(θ είναι η γωνία μεταξύ της εφαπτομένης της καμπύλης και του άξο-



να συμμετρίας). Υπολογίστε πρώτα την αντίσταση του σώματος, που περιγράφεται από μια τυχαία συνάρτηση $y(x)$, όταν το σώμα κινείται με ταχύτητα v παράλληλα με τον άξονά του. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των εξισώσεων Euler - Lagrange, αναζητήστε τη συνάρτηση που καθιστά την αντίσταση ελάχιστη. [Το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε για πρώτη φορά από τον Νεύτωνα (Principia, Scholium to Proposition XXXIV) και είναι από τα δυσκολότερα που κατόρθωσε να επιλύσει ο μεγάλος άγγλος επιστήμονας. Το γεγονός μάλιστα ότι κατάφερε να υπολογίσει και την ελεύθερη παράμετρο που προκύπτει από την παραπάνω σχέση, τη γωνία θ στο μπροστινό κόλουρο μέρος του βλήματος, αναδεικνύει την ξεχωριστή μαεστρία του.]