Κεφάλαιο 1

Αρχή Ελάχιστης Δράσης

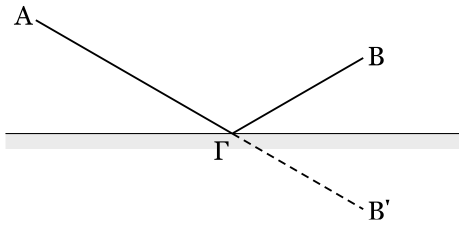
Ο δικός μας κόσμος είναι ο καλύτερος
από όλους τους δυνατούς κόσμους.
Gottfried Wilhelm Leibniz

1.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Οι επιτυχίες της νευτώνειας θεωρίας

Η νευτώνεια μηχανική, το πνευματικό δημιούργημα του Ισαάκ Νεύτωνα [1642-1727], κατέχει εξέχουσα θέση στην ιστορία των φυσικών επιστημών· αποτελεί την πρώτη σύγχρονη φυσική θεωρία για την κίνηση της ύλης. Επιχειρώντας να εξηγήσει τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών, ο Νεύτων διατύπωσε τη θεωρία που αφορά στην κίνηση της ύλης και επιπλέον εισήγαγε την πρώτη θεμελιώδη δύναμη της φύσης, τη βαρυτική δύναμη. Οι συνέπειες του νέου θεωρητικού οικοδομήματος που θεμελίωσε ο Νεύτων ήταν τεράστιες. Εξηγήθηκαν για πρώτη φορά πολύπλοκα φυσικά φαινόμενα, όπως οι παλίρροιες, και οι φυσικοί, που τότε ονομάζονταν φυσικοί φιλόσοφοι, μπορούσαν πλέον να αντιμετωπίζουν τον κόσμο σαν μια τεράστια μηχανή, η οποία κινείται υπακούοντας σε κάποιους απλούς αλλά θεμελιώδεις νόμους και, ακόμη περισσότερο, να προβλέπουν με ιδιαίτερη αξιοπιστία την εξέλιξη αυτού του κόσμου. Η ακρίβεια της νευτώνειας θεωρίας ήταν και εξακολουθεί να είναι εντυπωσιακή. Βασισμένοι στη νευτώνεια θεώρηση του κόσμου, ο Adams και ο Le Verrier κατόρθωσαν να προβλέψουν την ύπαρξη του πλανήτη Ποσειδώνα και να υποδείξουν τη θέση του κατόπιν παρατηρήσεων των διαταραχών της τροχιάς του Ουρανού.

Παρά ταύτα η νευτώνεια θεώρηση του κόσμου κρύβει μέσα της κάποια προβλήματα. Είμαστε πια σίγουροι ότι η απόλυτη θεώρηση του Νεύτωνα για το χώρο και το χρόνο έχει ανάγκη από μια σχετικιστική αναθεώρηση, όπως άλλωστε και η εφαρμογή της μηχανικής στο μικρόκοσμο απαιτεί μια αναθεώρηση στα πλαίσια της κβαντομηχανικής. Στο παρόν βιβλίο δεν πρόκειται βέβαια να ασχοληθούμε με την αναθεώρηση της μηχανικής του Νεύτωνα· θα συνεχίσουμε να κινούμαστε στο νευτώνειο κό-



Σχήμα 1.1: Η συντομότερη διαδρομή για το φως που συνδέει το σημείο εκπομπής Α με το σημείο λήψης Β είναι εκείνη που ικανοποιεί το νόμο της ανάκλασης (*γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης*)

σμο με απώτερο στόχο τη βαθύτερη κατανόηση της δομής της νευτώνειας θεωρίας.

Αν η μηχανική, όπως την έχουμε γνωρίσει έως σήμερα, είναι ουσιαστικά η μελέτη του φυσικού κόσμου όπως αυτή διαμορφώθηκε από το Νεύτωνα με την έκδοση, στις αρχές του 1687, του έργου του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, η αναλυτική μηχανική που θα εξετάσουμε στο παρόν βιβλίο, είναι η κατεξοχήν μελέτη της συνεισφοράς του Λαγκράνζ (Joseph-Louis Lagrange [1736-1813]) και του Χάμιλτον (William Rowan Hamilton [1805-1865]), ιδιαίτερα κατά την τριετία 1834-1836.

Μια εναλλακτική πορεία προς τη νευτώνεια μηχανική

Στο βιβλίο τούτο δεν πρόκειται να ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη συστηματοποίησης των νευτώνειων νόμων, αλλά μια εντελώς διαφορετική πορεία, ένα παιγνίδι διαπιστώσεων, εμπνευσμένο, θα έλεγε κανείς, από τη μεταφυσική αναζήτηση μιας βαθύτερης αρχής, η οποία υπαγορεύει πιθανώς την εξέλιξη του κόσμου. Ήδη από τον 1ο μ.Χ. αιώνα στην Ελλάδα ο Ήρωνας ο Αλεξανδρινός είχε διαπιστώσει ότι το φως ανακλώμενο σε ένα επίπεδο κάτοπτρο ακολουθεί τη συντομότερη διαδρομή και διατύπωσε την άποψη ότι η φύση επιλέγει πάντοτε για το φως τη συντομότερη διαδρομή. Ακολουθώντας αντίστροφα αυτή την αρχή, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, αφού το συνολικό μήκος της διαδρομής του ανακλώμενου φωτός από το σημείο Α στο σημείο Β (βλ. Σχήμα 1.1) είναι το μικρότερο δυνατό, θα πρέπει η διαδρομή ΑΓΒ να είναι η μικρότερη δυνατή, όπως επίσης και η ΑΓΒ′, όπου Β′ το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το κάτοπτρο. Προφανώς, σύμφωνα με την ευκλείδεια γεωμετρία, η συντομότερη διαδρομή που ενώνει τα δύο σημεία Α και Β′ είναι η ευθεία. Επομένως, το τμήμα ΑΓ ανήκει στην ίδια ευθεία με το ΓΒ′. Εύκολα μπορεί τώρα κάποιος, χρησιμοποιώντας απλά γεωμετρικά επιχειρήματα, να εξαγάγει συμπεράσματα σχετικά με τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των διαδρομών του φωτός και του κατόπτρου και να διατυπώσει το νόμο της ανάκλασης του φωτός, σύμφωνα με τον οποίο η γωνία πρόσπτωσης σε ένα κάτοπτρο είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης. Αυτή η αρχή, όμως, δεν φαίνεται να έχει γενική ισχύ για την κίνηση του φωτός, διότι, αν ίσχυε γενικά, στην περίπτωση της διάθλασης του φωτός θα οδηγούσε σε μηδενική διάθλαση.

Στα μέσα του 17ου αιώνα ο γάλλος μαθηματικός Pierre de Fermat [1601-1665], διαφοροποιώντας ελαφρώς τη διατύπωση της αρχής του Ήρωνα και υποστηρίζοντας ότι δεν είναι το μήκος της διαδρομής που διανύει το φως, αλλά ο χρόνος της κίνησης του φωτός αυτό που καθίσταται ελάχιστο, κατέληξε στο σωστό νόμο της διάθλασης, το νόμο του van Roijen Willebrord Snell [1591-1626] (βλ. Πρόβλημα 1). Το 1744 ο γάλλος μαθηματικός Pierre-Louis Moreau de Maupertuis [1698-1759] διατύπωσε μια νέα αρχή ελαχίστου, σύμφωνα με την οποία οι κινήσεις των σωμάτων είναι τέτοιες ώστε η συνολική "δράση" να είναι ελάχιστη, γεγονός το οποίο θεώρησε απόδειξη της σοφίας του Θεού. Η ποσότητα, όμως, της δράσης την οποία πρότεινε ο Maupertuis δεν ήταν η σωστή, ενώ από τις αποδείξεις του έλειπε η σαφήνεια και η ακρίβεια. Μερικά χρόνια αργότερα ο Leonhard Euler [1707-1783] και ο Lagrange προσδιόρισαν την ορθή μορφή της δράσης και τον επόμενο αιώνα ο Hamilton διατύπωσε με απόλυτη σαφήνεια την "*αρχή της ελάχιστης δράσης*" (principle of least action), όπως συνηθίζεται, εσφαλμένα, να αναφέρεται για ιστορικούς λόγους, ή "*αρχή της στάσιμης δράσης*", ή απλά "*αρχή του Χάμιλτον*". Σύμφωνα με την αρχή του Χάμιλτον υπάρχει μία θεμελιώδης συνάρτηση των θέσεων και των ταχυτήτων που χαρακτηρίζει το εκάστοτε φυσικό σύστημα. Αυτή η θεμελιώδης συνάρτηση είναι η λαγκρανζιανή συνάρτηση, L. Για μηχανικά συστήματα που βρίσκονται υπό την επίδραση συντηρητικών δυνάμεων η λαγκρανζιανή συνάρτηση είναι η διαφορά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος

Μια νέα αρχή για την κίνηση των μηχανικών συστημάτων

$$L = E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}} \; .$$

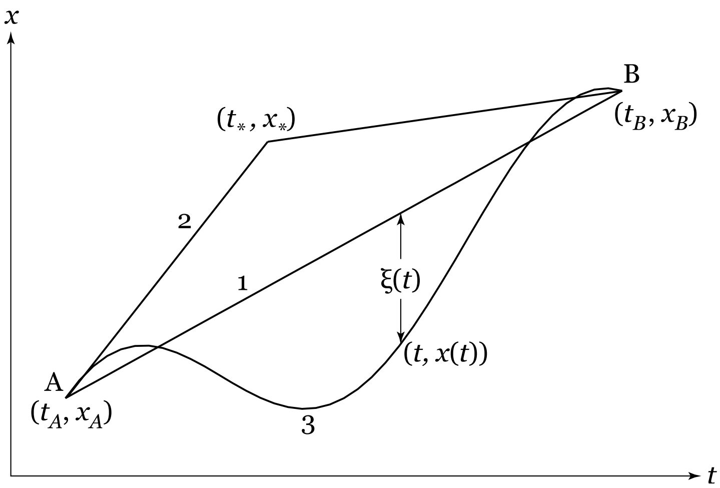
Έτσι, η αρχή του Χάμιλτον διατυπώνεται ως εξής:

> Ένα σωματίδιο που ξεκινά από το σημείο Α τη χρονική στιγμή t_A, και φτάνει στο σημείο Β τη χρονική στιγμή t_B, ακολουθεί στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα τη διαδρομή εκείνη για την οποία η δράση, δηλαδή η ποσότητα
>
> $$S = \int_{t_A}^{t_B} L dt \tag{1.1}$$
>
> καθίσταται στάσιμη.

Προς το παρόν δεν θα ασχοληθούμε με το να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό του όρου "στάσιμο". Θα τον θεωρήσουμε συνώνυμο του όρου "ακρότατο". Ας εξετάσουμε ωστόσο μερικά παραδείγματα για να πειστούμε ότι η αρχή που διατυπώθηκε παραπάνω οδηγεί σε ορθά συμπεράσματα.
Παράδειγμα 1: Έστω ένα ελεύθερο σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση. Όπως γνωρίζουμε, ένα σωματίδιο στο οποίο δεν ασκείται καμία δύναμη κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η δράση για το σωματίδιο αυτό, δεδομένου ότι $L = E_{\text{κιν}}$, είναι

$$S = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m u^2 dt \; , \tag{1.2}$$

όπου u η ταχύτητα του σωματιδίου. Ποια διαδρομή στο χώρο και το χρόνο είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το παραπάνω ολοκλήρωμα; Ας δοκιμάσουμε τις τρεις διαδρομές που απεικονίζονται στο χωροχρονικό διάγραμμα του



Σχήμα 1.2: Η δράση ενός ελεύθερου σωματιδίου υπολογισμένη σε τρεις διαδρομές. Στη διαδρομή (1) το σωματίδιο κινείται ισοταχώς από το (t_A, x_A) στο (t_B, x_B). Στην τεθλασμένη διαδρομή (2) το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα από το (t_A, x_A) μέχρι το ενδιάμεσο σημείο (t_*, x_*) και κατόπιν με σταθερή, αλλά διαφορετική ταχύτητα, από το (t_*, x_*) μέχρι το (t_B, x_B). Στην τυχαία διαδρομή (3) το σωματίδιο κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα από το (t_A, x_A) στο (t_B, x_B).

Σχήματος 1.2. Για τη διαδρομή (1) που αντιστοιχεί σε ισοταχή κίνηση με ταχύτητα

$$u = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

η δράση είναι

$$S_1 = \frac{1}{2} m \frac{(x_B - x_A)^2}{t_B - t_A} \ .$$

Για τη διαδρομή (2) η δράση είναι

$$S_2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{(x_\star - x_A)^2}{t_\star - t_A} + \frac{(x_B - x_\star)^2}{t_B - t_\star} \right] \ ,$$

όπου $x_\star, t_\star$ οι χωροχρονικές συντεταγμένες του σημείου θλάσης της τεθλασμένης διαδρομής. Για τη διαδρομή (1) δεν έχουμε να πούμε τίποτε περισσότερο· η διαδρομή αυτή είναι καθορισμένη και επομένως η δράση που αντιστοιχεί σε αυτή είναι και αυτή καθορισμένη. Η διαδρομή (2) είναι στην πραγματικότητα μια ολόκληρη οικογένεια διαδρομών, καθεμία από τις οποίες προσδιορίζεται από τη θέση του ενδιάμεσου σημείου (t_*, x_*). Για να εντοπίσουμε, λοιπόν, μέσα στο πλήθος των διαδρομών την ιδιαίτερη εκείνη διαδρομή που καθιστά τη δράση ελάχιστη, θα πρέπει να παραγωγίσουμε τη δράση ως προς τις παραμέτρους της καμπύλης (βλ. Άσκηση 1.1 σχετικά με το αν αυτό που θα βρούμε αντιστοιχεί σε ελάχιστο ή μέγιστο). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση το ελάχιστο της δράσης παρατηρείται όταν οι ταχύτητες των δύο τμημάτων της διαδρομής συμπίπτουν, οπότε τότε η δράση είναι ίση με την S_1. Τελειώσαμε; Βρήκαμε με τον παραπάνω τρόπο τη διαδρομή εκείνη που καθιστά ελάχιστη τη δράση; Όχι βέβαια. Εξετάσαμε μόνο μία πολύ περιορισμένη οικογένεια διαδρομών και βρήκαμε ποια από αυτές καθιστά τη δράση ελάχιστη. Πρέπει, όμως, κανείς να εξετάσει κάθε είδους διαδρομή, όσο αλλοπρόσαλλη και αν είναι αυτή, αν θέλει να βεβαιωθεί ότι βρήκε τη διαδρομή εκείνη που καθιστά τη δράση στάσιμη. Πώς είναι, όμως, δυνατόν να παραμετροποιήσουμε κάθε δυνατή διαδρομή ώστε να αναζητήσουμε το α-κρότατο της δράσης ως προς κάθε παράμετρο; Η απάντηση στο ερώτημα τούτο θα αποτελέσει το κυρίως αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου. Με τέτοιου είδους προβλήματα ασχολείται ένας ιδιαίτερος κλάδος της ανάλυσης, ο καλούμενος *λογισμός των μεταβολών*, θεμελιωτές του οποίου θεωρούνται οι ελβετοί αδελφοί Γιάκομπ και Γιόχαν Μπερνούλι (Jakob Bernoulli [1654-1705] και Johann Bernoulli [1667-1748]).[1]

Άσκηση 1.1. *Σκεφτείτε αν υπάρχει περίπτωση να παρουσιάζει μέγιστο η δράση που αντιστοιχεί σε κάποια διαδρομή τύπου (2). [Υπόδειξη: Τι συμβαίνει όταν $x_\star \longrightarrow \infty$;]* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Προς το παρόν εμείς ας συνεχίσουμε την προσπάθειά μας για την επίλυση του αρχικού μας προβλήματος. Γράφουμε την τυχαία διαδρομή (3) ως εξής:

$$x_3(t) = x_A + \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}(t - t_A) + \xi(t) \; .$$

Στο πρώτο μέρος αυτής της έκφρασης αναγνωρίζει κανείς την ομαλή κίνηση της διαδρομής (1). Το $\xi(t)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση που καθορίζει την οποιαδήποτε διαδρομή ως απόκλιση απο τη διαδρομή (1) (βλ. Σχήμα 1.2). Η δράση τώρα λαμβάνει τη μορφή

$$S_3 = \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} (\bar{u} + \dot{\xi})^2 dt \; ,$$

όπου έχουμε ορίσει ως $\bar{u}$ την ποσότητα

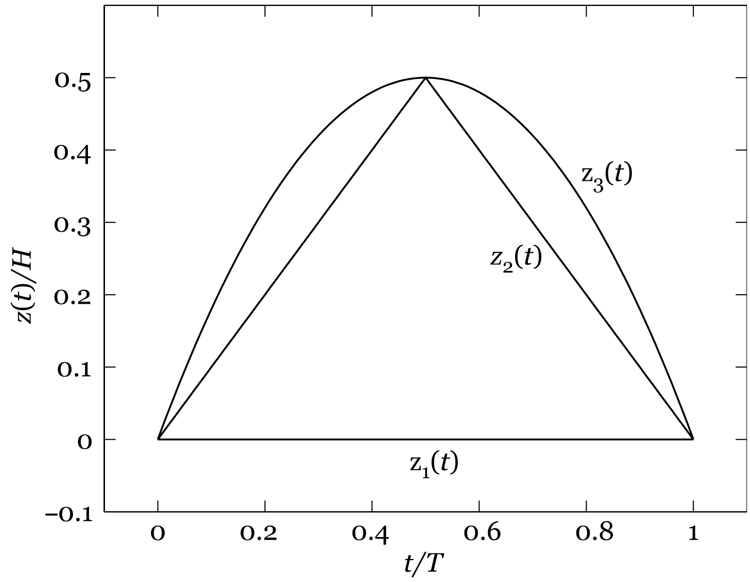
$$\bar{u} \equiv \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \; ,$$

τη μέση, δηλαδή, ταχύτητα της τυχαίας διαδρομής και ως $\dot{\xi} \equiv d\xi/dt$ τη χρονική παράγωγο της απόκλισης από την ομαλή κίνηση. Παρατηρούμε, όμως, ότι,

$$\int_{t_A}^{t_B} \dot{\xi} dt = \int_A^B d\xi = \xi(B) - \xi(A) = 0 \; ,$$

αφού η τυχαία διαδρομή, σύμφωνα με τη διατύπωση της αρχής του Χάμιλτον, ξεκινά και καταλήγει στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως και η

[1] Ο Jakob Bernoulli ήταν εκείνος ο οποίος κατάφερε να υπολογίσει τη μορφή της καμπύλης που σχηματίζει μια αλυσίδα κρεμασμένη από τα δύο της άκρα, αναζητώντας την καμπύλη εκείνη που έχει πιο χαμηλά το κέντρο βάρους της, που γι' αυτό ονομάστηκε αλυσοειδής καμπύλη.



Σχήμα 1.3: Οι τρεις τύποι διαδρομών του Παραδείγματος 2. Η μοναδική παράμετρος των διαδρομών αυτών είναι το μέγιστο ύψος H.

ευθύγραμμη διαδρομή (1), οπότε είναι $\xi(B) = \xi(A) = 0$. Έτσι

$$S_3 = \frac{1}{2}m\bar{u}^2 \int_{t_A}^{t_B} dt + \frac{1}{2}m \int_{t_A}^{t_B} \dot{\xi}^2 dt \, .$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα, όντας θετικά ορισμένο, λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του, δηλαδή μηδέν, όταν $\dot{\xi} = 0$, με άλλα λόγια όταν $\xi =$ σταθερό $= \xi(A) = 0$, ενώ το πρώτο ολοκλήρωμα δεν είναι άλλο από την S_1. Συνεπώς, είμαστε πια σίγουροι ότι η ομαλή κίνηση είναι εκείνη που προσδίδει στη δράση την ελάχιστη τιμή της. Αυτή την κίνηση, λοιπόν, επιλέγει το ελεύθερο σωματίδιο. Η αρχή ελάχιστης δράσης οδήγησε στο γνωστό, ορθό αποτέλεσμα. Η μέθοδος που εφαρμόσαμε στην απόδειξή μας είναι σε αδρές γραμμές η μέθοδος την οποία θα εφαρμόσουμε σε γενικότερα προβλήματα κίνησης που θα εξετάσουμε σε επόμενα κεφάλαια. Είναι εύκολο πάντως να γενικεύσουμε την παραπάνω μέθοδο στην περίπτωση της κίνησης ενός σώματος στον τρισδιάστατο κόσμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.2. *Δείξτε ότι για ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται στον τρισδιάστατο χώρο, η δράση καθίσταται ελάχιστη για τη διαδρομή εκείνη στο χώρο και το χρόνο που αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. [Υπόδειξη: Αντί του u^2 θα έχετε τώρα $\vec{u} \cdot \vec{u}$, το οποίο μπορείτε να γράψετε ως $(\bar{u}_x + \dot{\xi}_x)^2 + (\bar{u}_y + \dot{\xi}_y)^2 + (\bar{u}_z + \dot{\xi}_z)^2$.]*

Παράδειγμα 2: Προκειμένου να διερευνήσουμε την πλήρη μορφή της έκφρασης για τη δράση, ας εξετάσουμε ένα απλό πρόβλημα κίνησης σε κάποιο πεδίο: την κίνηση μιας μπάλας, μάζας $m = 1$, την οποία πετάμε κατακόρυφα προς τα επάνω μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης και η οποία επιστρέφει στα χέρια μας T δευτερόλεπτα αργότερα. Σε αυτή την περίπτωση η δράση για τη διαδρομή $z(t)$ είναι

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - gz \right) dt \, . \tag{1.3}$$

Ας υπολογίσουμε τη δράση για τους τρεις τύπους χωροχρονικών διαδρομών που απεικονίζονται στο Σχήμα 1.3.
(i) Διαδρομή τύπου (1):

$$z_1(t) = 0 \, .$$

Η αντίστοιχη δράση είναι

$$S_1 = 0 \, .$$

(ii) Διαδρομή τύπου (2):

$$z_2(t) = H \left(1 - \frac{|t - T/2|}{T/2} \right)$$

Η αντίστοιχη δράση, όπως μπορεί να υπολογίσει κανείς, είναι

$$S_2 = \frac{2H^2}{T} - \frac{gHT}{2} \, .$$

(iii) Διαδρομή τύπου (3):

$$z_3(t) = \frac{4H}{T^2} t(T - t) \, .$$

Η αντίστοιχη δράση είναι

$$S_3 = \frac{8H^2}{3T} - \frac{2gHT}{3} \, .$$

Άσκηση 1.3. *Εκτελέστε τις πράξεις με σκοπό να ελέγξετε την ορθότητα των παραπάνω εκφράσεων για τη δράση στους διάφορους τύπους διαδρομών. Στη συνέχεια παραγωγίστε τις εκφράσεις για τη δράση ως προς τη μεταβλητή H προκειμένου να ελαχιστοποιήσετε την τιμή της δράσης, υπολογίζοντας το H εκείνο που καθιστά τη δράση ακρότατη.* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Παρατηρούμε ότι η τρίτη οικογένεια διαδρομών από αυτές που εξετάσαμε εμπεριέχει τη σωστή εξίσωση κίνησης, η οποία είναι δευτέρου βαθμού ως προς το χρόνο. Οι τρεις οικογένειες διαδρομών που εξετάσαμε δεν εξαντλούν προφανώς όλες τις δυνατές διαδρομές που συνδέουν το αρχικό με το τελικό σημείο. Μολαταύτα σκοπός μας εδώ δεν είναι να ανακαλύψουμε τη μοναδική εκείνη διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη· δεν έχουμε μάθει, εξάλλου, ακόμη την κατάλληλη τεχνική για να πράξουμε κάτι τέτοιο. Σκοπός μας είναι να βεβαιωθούμε ότι από όλες τις διαδρομές που επιλέξαμε, μεταξύ των οποίων τυχαίνει να βρίσκεται αυτή που προβλέπει η νευτώνεια εξίσωση κίνησης, η σωστή είναι εκείνη που θα μας οδηγήσει στην ελάχιστη τιμή της δράσης. Μοναδική παράμετρος και της διαδρομής τύπου (2) και της διαδρομής τύπου (3) είναι το μέγιστο ύψος H. Αν παραγωγίσουμε ως προς αυτή την παράμετρο, διαπιστώνουμε ότι η δράση καθίσταται ελάχιστη, όταν

$$H = \frac{gT^2}{8}$$

και στις δύο περιπτώσεις. Αυτή, όμως, είναι η τιμή του πραγματικού μέγιστου ύψους στο οποίο ανέρχεται η μπάλα! Πρόκειται άραγε για απλή σύμπτωση; Όχι ακριβώς. Η διαδρομή τύπου (2), αν και λανθασμένη, στην προσπάθειά της να μειώσει τη δράση όσο το δυνατόν περισσότερο διέρχεται από το σωστό ύψος. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας ως εξίσωση κίνησης μία συνάρτηση τετάρτου βαθμού ως προς το χρόνο, λαμβάνουμε ως καλύτερη τιμή για το H την πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικής τιμής $7gT^2/64$ (βλ. Άσκ. 1.4). Ας δούμε, τώρα, και τις αντίστοιχες τιμές που λαμβάνει η δράση, όταν η παράμετρος H έχει ρυθμιστεί με τέτοιο τρόπο ώστε η δράση να γίνει ελάχιστη.

$$S_2|_{(\min)} = -\frac{1}{32} m g^2 T^3$$

και

$$S_3|_{(\min)} = -\frac{1}{24} m g^2 T^3 \ .$$

Νικητής, λοιπόν, σε αυτόν τον αγώνα ελαχιστοποίησης της δράσης αναδείχθηκε η διαδρομή

$$z(t) = \frac{gT}{2} t - \frac{1}{2} g t^2 \ ,$$

που αποτελεί τη γνωστή μας εξίσωση κίνησης. Στην έκφραση για την παραπάνω διαδρομή έχουμε αντικαταστήσει τη βέλτιστη τιμή του H, $gT^2/8$, που υπολογίσαμε προηγουμένως για τη διαδρομή τύπου (2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

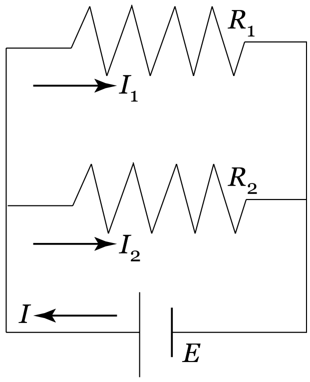
Άσκηση 1.4. *Αν δεν έχετε ακόμη πειστεί ότι με τους τρεις μόνο τύπους διαδρομών που θεωρήσαμε παραπάνω πετύχαμε να βρούμε το ελάχιστο της δράσης, θεωρήστε έναν ακόμη τύπο διαδρομής τέταρτης τάξης ως προς το χρόνο,*

$$z(t) = \frac{16H}{T^4} t^2 (T-t)^2 \ .$$

Υπολογίστε τη δράση για τη διαδρομή αυτή και αφού την ελαχιστοποιήσετε ως προς την παράμετρο H, υπολογίστε την τιμή της H που την καθιστά ελάχιστη. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δράσης για τη διαδρομή αυτού του τύπου;

Παράδειγμα 3: Προτού εγκαταλείψουμε αυτό το παιγνίδι των υπολογισμών, ας εξετάσουμε μια παρόμοια[2] αρχή ελαχίστου σε ένα διαφορετικό

[2] Οι βάσεις της αρχής αυτής είναι εντελώς διαφορετικές από αυτές της αρχής ελάχιστης δράσης.



Σχήμα 1.4: Η αρχή οικονομικότερης κατανομής των ρευμάτων οδηγεί στη σωστή κατανομή των ρευμάτων.

χώρο της φυσικής, ώστε να φανεί το εύρος της εφαρμογής που έχουν παρόμοιες αρχές στη φυσική: *Η κατανομή των ρευμάτων στους διάφορους κλάδους ενός ηλεκτρικού κυκλώματος είναι η οικονομικότερη από πλευράς κατανάλωσης θερμότητας.* Μια τέτοια αρχή μπορεί κάλλιστα να αντικαταστήσει το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, δηλαδή την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το απλούστατο κύκλωμα δύο ωμικών αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα με μια ιδανική γεννήτρια (βλ. Σχήμα 1.4). Ο συνολικός ρυθμός κατανάλωσης θερμότητας στις δύο αντιστάσεις είναι

$$\frac{dQ}{dt} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 R_1 + (I - I_1)^2 R_2 \ .$$

Στην παραπάνω έκφραση χρησιμοποιήσαμε την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου στον κόμβο που διαχωρίζονται τα δύο ρεύματα. Επιδιώκοντας στη συνέχεια να ελαχιστοποιήσουμε αυτόν το ρυθμό κατανάλωσης, μεταβάλλουμε την τιμή του ρεύματος I_1 και βρίσκουμε ότι

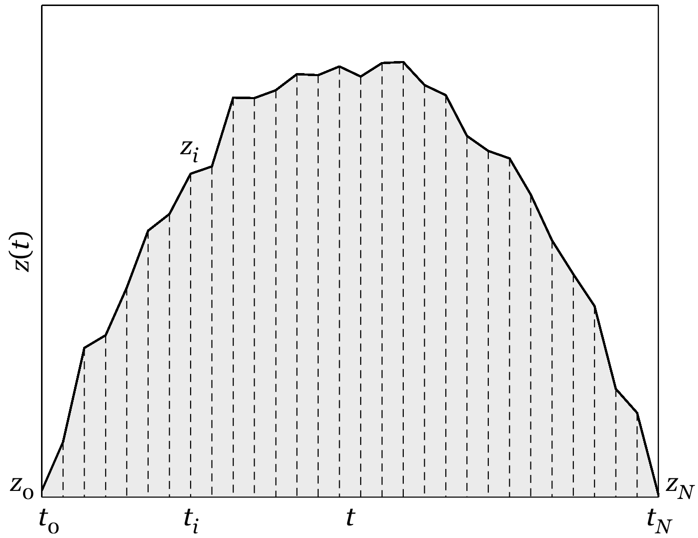
$$I_1 R_1 - (I - I_1) R_2 = 0 \ ,$$

δηλαδή ότι οι τάσεις στα άκρα των δύο αντιστάσεων πρέπει να συμπίπτουν!

Η αρχή ελάχιστης δράσης, που είδαμε στα δύο πρώτα παραδείγματα, φαίνεται να "δουλεύει". Τι σχέση έχει, όμως, αυτή η αρχή με τους νόμους του Νεύτωνα; Και πώς είναι δυνατόν το σωματίδιο να γνωρίζει εκ των προτέρων ποια είναι η διαδρομή εκείνη που του εξασφαλίζει την ακρότατη τιμή της δράσης; Μήπως το σωματίδιο ακολουθεί μια τυχαία διαδρομή, υπολογίζει τη δράση και κατόπιν επιστρέφει πίσω στο χρόνο για να δοκιμάσει κάποια άλλη διαδρομή;

Ποια η σχέση μεταξύ της αρχής ελάχιστης δράσης και του 2ου νόμου του Νεύτωνα;

Επιχειρώντας να διαλευκάνουμε το ζήτημα, θα επανεξετάσουμε το παράδειγμα 2, εκείνο, δηλαδή με την μπάλα που ανεβαίνει και κατεβαίνει μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Στην προσπάθειά μας μάλιστα να είμαστε απολύτως ακριβείς δεν θα δοκιμάσουμε αυτή τη φορά ορισμένες οικογένειες διαδρομών, αλλά μια τυχαία διαδρομή, την οποία, όμως, θα τμήσουμε σε απειροελάχιστα χρονικά διαστήματα αντικαθιστώντας την



Σχήμα 1.5: Η συνεχής διαδρομή $z(t)$ που διέρχεται στο χρόνο $t_A = t_0$ από το ύψος $z_A = z_0$ και στο χρόνο $t_B = t_N$ από το ύψος $z_B = z_N$ προσεγγίζεται από τη διαδρομή που λαμβάνει τις N ενδιάμεσες τιμές: $z(t_i) = z_i$ για $i = 0, 1, \ldots, N$, όπου $N\tau = t_B - t_A$, και $\tau = t_i - t_{i-1}$. Για N αρκούντως μεγάλο η τεθλασμένη διαδρομή είναι ακριβώς ίδια με τη συνεχή διαδρομή $z(t)$.

με μια τεθλασμένη γραμμή (βλ. Σχήμα 1.5). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η δράση που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε διαδρομή μπορεί να προσεγγισθεί με οσηδήποτε ακρίβεια επιθυμούμε από το ακόλουθο άθροισμα:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - mgz \right) dt \qquad (1.4) \\ &\approx \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{m}{2} \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{\tau^2} - mg \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \right] \tau \,, \end{aligned}$$

όπου $N\tau = t_B - t_A = T$, $z_0 = z_A$, $z_N = z_B$ και $\tau = t_i - t_{i-1}$. Στην παραπάνω έκφραση αντικαταστήσαμε την ταχύτητα κάθε μικρού χρονικού διαστήματος με

$$u = \frac{z_i - z_{i-1}}{\tau}$$

και την ολοκλήρωση της θέσης για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα με

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} z \, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} [z_{i-1} + u(t - t_{i-1})] \, dt = \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \tau \,.$$

Για να είναι αυτό το άθροισμα ακρότατο ως προς όλες τις δυνατές διαδρομές, που στη θεώρησή μας παραμετροποιούνται μέσω των ενδιάμεσων θέσεων $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$, πρέπει $\partial S / \partial z_i = 0$ για όλες τις τιμές του i, από 1 έως $N - 1$. Εκτελώντας τις πράξεις καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\frac{z_i - z_{i-1}}{\tau} - \frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} - g\tau = 0 \,.$$

Κατόπιν ανακατανομής των όρων η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{(z_{i+1} - z_i)/\tau - (z_i - z_{i-1})/\tau}{\tau} = -g \ , \tag{1.5}$$

η οποία στο όριο $N \to \infty$ τείνει στην

$$\ddot{z}(t) = -g \ , \tag{1.6}$$

αφού το αριστερό σκέλος της (1.5) είναι σε αυτή την περίπτωση το πηλίκο της διαφοράς της ταχύτητας σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές προς το αντίστοιχο απειροστό χρονικό διάστημα, δηλαδή είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι το ακρότατο της δράσης ως προς κάθε δυνατή διαδρομή είναι ισοδύναμο, τουλάχιστον για το πρόβλημα που εξετάσαμε, με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1.5. *Δείξτε με τον ίδιο τρόπο ότι η κίνηση $x(t)$ που ελαχιστοποιεί τη δράση*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt \ ,$$

είναι η φυσική κίνηση που ικανοποιεί τη νευτώνεια εξίσωση $m\ddot{x} = -dV/dx$.

Η αρχή ελάχιστης δράσης που διατυπώσαμε παραπάνω μπορεί να θεωρηθεί μια αρχή τελειότητας εκφρασμένη σε μαθηματική γλώσσα. Αν ήταν δυνατόν αυτή η αρχή να εφαρμοστεί σε όλα τα φυσικά συστήματα, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ο κόσμος μας είναι τέλειος με την έννοια ότι από όλους τους δυνατούς κόσμους ο δικός μας κόσμος είναι τέτοιος ώστε η εξέλιξη των διάφορων φυσικών συστημάτων στο χώρο και το χρόνο να καθιστά τη δράση ακρότατη. Με αφετηρία την αρχή της ελάχιστης δράσης θα σχολιάσουμε το εύρος εφαρμογής της, θα μάθουμε να υπολογίζουμε τα ακρότατα της δράσης, θα αποδείξουμε ότι αυτή η αρχή είναι ισοδύναμη με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα όσον αφορά στα μηχανικά συστήματα και θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο βαθύτερο ερώτημα που ακόμη παραμένει μετέωρο. Πώς καταφέρνουν τα σωματίδια να γνωρίζουν ποια είναι η διαδρομή που καθιστά τη δράση τους στάσιμη ώστε να επιλέγουν μόνο αυτή;

Εύρος εφαρμογής της αρχής του Χάμιλτον

Η δράση,

$$S = \int (E_{\text{κιν}} - E_{\text{δυν}}) dt \ ,$$

ενός μηχανικού συστήματος που αναφέρεται στην αρχή του Χάμιλτον έχει νόημα υπό την προϋπόθεση ότι το μηχανικό μας σύστημα μπορεί να συσχετιστεί με κάποια δυναμική ενέργεια. Στις περιπτώσεις που η κίνηση πραγματοποιείται σε πεδίο μη συντηρητικών δυνάμεων, όπως, για παράδειγμα όταν ολισθαίνουμε σε μια τσουλήθρα υπό την παρουσία τριβών, δεν μπορούμε, εν γένει, να κατασκευάσουμε μια δράση. Σε θεμελιακό, βέβαια, επίπεδο αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα, αφού δεν υπάρχει θεμελιώδης δύναμη της φύσης, η οποία να είναι μη συντηρητική. Οι μη συντηρητικές δυνάμεις, όπως η τριβή, είναι απλώς στατιστικό αποτέλεσμα συντηρητικών στη φύση τους δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται σε ατομικό επίπεδο και εμφανίζονται ως μη συντηρητικές, όταν μεταβαίνει κανείς σε μακροσκοπικό επίπεδο αμελώντας τις λεπτομέρειες του μικρόκοσμου. Στην πραγματικότητα η αρχή του Χάμιλτον έχει ακόμη μεγαλύτερη ισχύ από τους νόμους του Νεύτωνα. Βασιζόμενοι σε αυτήν έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε αντίστοιχες συναρτήσεις δράσης για τον ηλεκτρομαγνητισμό, τη θεωρία της σχετικότητας καθώς επίσης και για πεδία που αδυνατούμε να εξετάσουμε μέσα στα στενά πλαίσια της νευτώνειας μηχανικής.

Τι ακριβώς σημαίνει ότι "η δράση καθίσταται στάσιμη";

Παραμένει, όμως, ακόμη το τεχνικό πρόβλημα του τρόπου με τον οποίο θα υπολογίσουμε το ακρότατο της δράσης. Η δράση είναι συνάρτηση της διαδρομής που θα ακολουθήσει το μηχανικό σύστημα και όχι συνάρτηση κάποιων μεταβλητών· είναι, όπως λέμε, ένα *συναρτησοειδές* (functional). Μια γεύ-ση του τεχνικού αυτού ζητήματος πήραμε έμμεσα, όταν προσπαθήσαμε να προσδιορίσουμε με τον πιο γενικό τρόπο την κίνηση που εκτελεί ένα ελεύθερο σωματίδιο. Με τον ίδιο, ουσιαστικά, τρόπο θα προσεγγίσουμε και το γενικό πρόβλημα.

Έστω $x_0(t)$ η φυσική διαδρομή του μηχανικού συστήματος, δηλαδή η διαδρομή που καθιστά τη δράση που αντιστοιχεί στη Λαγκρανζιανή

$$\frac{1}{2}mu^2 - V(x)$$

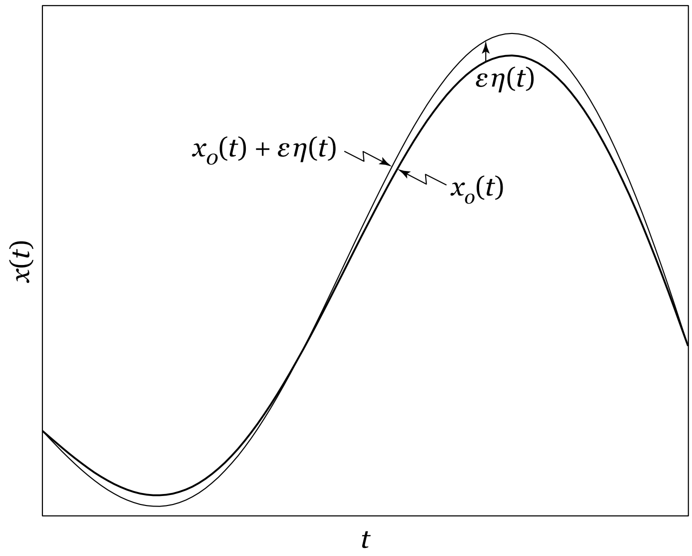
στάσιμη. Αυτό σημαίνει ότι, αν παρεκκλίνουμε πολύ λίγο από αυτήν τη διαδρομή, η δράση δεν πρόκειται να αλλάξει αισθητά. Ποσοτικά, αν η παρέκκλισή μας είναι τάξης ϵ, όπου ϵ ένας πολύ μικρός αριθμός, η διαφορά στη δράση μεταξύ των δύο διαδρομών θα είναι τάξης ϵ^2. Προσπαθώντας να κατανοήσουμε βαθύτερα την παραπάνω συνθήκη σχετικά με τη στασιμότητα της δράσης, ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα από την Ανάλυση που γνωρίζουμε καλά. Μια συνάρτηση[3] $f(x)$ μίας μεταβλητής μπορεί να αναπτυχθεί γύρω από οποιοδήποτε σημείο, x_0, μέσω του αναπτύγματος Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \, f''(x_0) + \ldots .$$

Αν το σημείο x_0 αποτελεί ακρότατο της συνάρτησης, τότε θα είναι $f'(x_0) = 0$· ειδάλλως πολύ κοντά στο σημείο x_0 η συνάρτηση θα είναι γνησίως μονότονη. Έτσι, αν απομακρυνθούμε κατά πολύ μικρή απόσταση ϵ από το ακρότατο σημείο x_0, η τιμή της συνάρτησης θα είναι

$$f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \frac{\epsilon^2}{2} \, f''(x_0) + \ldots = f(x_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \, ,$$

[3]Στο εξής, όποτε αναφερόμαστε σε συναρτήσεις, θα υποθέτουμε ότι αυτές έχουν όλες τις καλές ιδιότητες (συνέχεια, παραγωγισιμότητα κ.ο.κ.), που χρειαζόμαστε για να στηρίξουμε το επιχείρημά μας. Σε αντίθετη περίπτωση, όταν θελήσουμε να ελέγξουμε παθολογικές καταστάσεις, θα είμαστε προσεκτικοί και σαφείς στη διατύπωσή μας.



Σχήμα 1.6: Η φυσική διαδρομή $x_0(t)$ είναι αυτή για την οποία η δράση δεν μεταβάλλεται παρά μόνο σε δεύτερη τάξη ως προς ϵ, αν η διαδρομή μεταβληθεί κατά $\epsilon\eta(t)$, δηλαδή σε πρώτη τάξη ως προς ϵ.

όπου το σύμβολο $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ δηλώνει ποσότητα τάξης τουλάχιστον ϵ^2. Το ίδιο θα συμβαίνει και με τη δράση, μόνο που σε αυτή την περίπτωση το ϵ θα δηλώνει μια παραμετροποίηση της πολύ γειτονικής στη φυσική διαδρομής (βλ. Σχήμα 1.6). Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει

$$S(x_0(t) + \epsilon\eta(t)) - S(x_0(t)) = \mathcal{O}(\epsilon^2) , \tag{1.7}$$

όπου $x_0(t)$ είναι η φυσική διαδρομή που καθιστά τη δράση ακρότατη και $\eta(t)$ είναι μια αυθαίρετη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση που δείχνει με ποιο τρόπο η καινούργια διαδρομή αποκλίνει από τη φυσική. Η μοναδική απαίτηση που πρέπει να ικανοποιείται από τη συνάρτηση $\eta(t)$, σύμφωνα με την αρχή του Χάμιλτον, είναι η

$$\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0 .$$

Ο παράγοντας ϵ, όντας οσοδήποτε μικρός, εξασφαλίζει τη γειτνίαση της καινούργιας διαδρομής με τη φυσική διαδρομή. Επειδή η δράση είναι

$$S(x(t)) = \int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right) dt ,$$

υπολογίζουμε ότι η διαφορά των δράσεων που αντιστοιχούν στις δύο ελαφρώς διαφορετικές διαδρομές θα είναι σε όρους αύξουσας τάξης ως προς ϵ,

$$\begin{aligned} S(x_0 + \epsilon\eta) - S(x_0) &= \left[\int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2}m(\dot{x}_0 + \epsilon\dot{\eta})^2 dt - \int_{t_A}^{t_B} V(x_0 + \epsilon\eta) dt\right] - \\ &\quad \left[\int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2}m(\dot{x}_0)^2 dt - \int_{t_A}^{t_B} V(x_0) dt\right] \\ &= \epsilon \int_{t_A}^{t_B} \left[m\dot{x}_0\dot{\eta} - V'(x_0)\eta\right] dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Στους παραπάνω υπολογισμούς αναπτύξαμε τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας κατά Taylor

$$V(x_0 + \epsilon\eta) = V(x_0) + \epsilon\eta V'(x_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ .$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες το πρώτο ολοκλήρωμα της τελευταίας σειράς αποκτά τη μορφή

$$\int_{t_A}^{t_B} m\dot{x}_0\dot{\eta}dt = m\dot{x}_0\eta|_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}_0\eta dt = -\int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}_0\eta dt \ ,$$

αφού $\eta(t_A) = \eta(t_B) = 0$. Για να είναι στάσιμη η δράση, πρέπει ο όρος τάξης ϵ της σχέσης (1.8) να είναι ταυτοτικά μηδενικός. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[m\ddot{x}_0 + V'(x_0)\right]\eta dt = 0 \ , \tag{1.9}$$

Ισοδυναμία της αρχής του Χάμιλτον με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

κάτι που πρέπει να ισχύει για κάθε είδους διαδρομή γειτονική στη φυσική διαδρομή, δηλαδή για κάθε συνάρτηση $\eta(t)$. Είναι διαισθητικά προφανές, αν και θα το αποδείξουμε με απόλυτη αυστηρότητα στη συνέχεια, ότι η ποσότητα μεταξύ των τετράγωνων αγκυλών πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν, δηλαδή

$$m\ddot{x}_0 = -V'(x_0) \ .$$

Με άλλα λόγια, καταλήγουμε στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και επιβεβαιώνουμε ότι η διαδρομή που καθιστά τη δράση στάσιμη είναι εκείνη που ακολουθεί το σωματίδιο υπακούοντας στο νόμο της δυναμικής του Νεύτωνα

$$m\ddot{x} = F(x) \ .$$

Είναι εύλογο ότι η παραπάνω απόδειξη θα μπορούσε να λειτουργήσει και με αντίστροφη φορά, δηλαδή ξεκινώντας από το νόμο του Νεύτωνα και καταλήγοντας στην αρχή ελάχιστης δράσης. Στην κλασική θεώρηση, λοιπόν, όπου το σωματίδιο έχει καθορισμένη θέση σε κάθε χρονική στιγμή και οι κινήσεις του υπαγορεύονται από τη σχέση αιτίου–αιτιατού (κινητήρια δύναμη–καθορισμός τροχιάς), η αρχή ελάχιστης δράσης δεν είναι κάποιος τελεολογικός νόμος, αλλά απορρέει από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, αφού αποδεικνύεται ισοδύναμη με αυτόν. Η εφαρμογή της αρχής ελάχιστης δράσης μεταξύ ενός αρχικού και ενός τελικού σημείου της τροχιάς μπορεί να εστιαστεί σε ένα απειροελάχιστο τμήμα της διαδρομής, οπότε η αναζήτηση ακροτάτου σε αυτή την περίπτωση σχετίζεται άμεσα με τη διαφορική αλλαγή της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή τη δύναμη που υπαγορεύει στο σωματίδιο πώς να κινηθεί.

Κβαντομηχανική και αρχή του Χάμιλτον

Η κβαντομηχανική θεώρηση ενός σωματιδίου είναι διαφορετική από εκείνη της κλασικής μηχανικής. Κβαντομηχανικά το σωματίδιο παύει να υφίσταται ως οντότητα με συγκεκριμένη θέση και ταχύτητα. Η καλύτερη δυνατή περιγραφή του σωματιδίου δίνεται από την κυματοσυνάρτηση, μία μιγαδική συνάρτηση της θέσης το μέτρο της οποίας αν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει την πιθανότητα ανίχνευσης του σωματιδίου στη θέση αυτή.

Σύμφωνα πάντα με την κβαντομηχανική θεώρηση, η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια διαδρομή του σωματιδίου, δεδομένου ότι τούτο ακολουθεί μια υποτιθέμενη διαδρομή στο χώρο και το χρόνο, είναι ανάλογη της ποσότητας

$$Z_j = e^{\imath S[x_j(t)]/\hbar} \ ,$$

όπου $S[x_j(t)]$ είναι η δράση που αντιστοιχεί στη διαδρομή $x_j(t)$ και $\hbar$ είναι η σταθερά του Max Karl Ernst Planck [1858-1947], η οποία έχει το τρομακτικά μικρό μέγεθος 1.054×10^{-34} Joule·s.[4] Η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στη διαδρομή τούτη, έχει μέτρο υψωμένο στο τετράγωνο, το οποίο είναι ανάλογο της πιθανότητας πραγματοποίησης της διαδρομής αυτής. Η ποσότητα Z_j μπορεί να παρασταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως ένα διάνυσμα μοναδιαίου μήκους, στραμμένο κατά γωνία $S[x_j(t)]/\hbar$ ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Επειδή η κβαντομηχανική είναι θεμελιωδώς γραμμική θεωρία, η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου που μεταβαίνει από το δεδομένο αρχικό σημείο στο δεδομένο τελικό σημείο, θα είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός όλων των επί μέρους κυματοσυναρτήσεων των διαδρομών που συνδέουν τα δύο ακραία σημεία. Δηλαδή

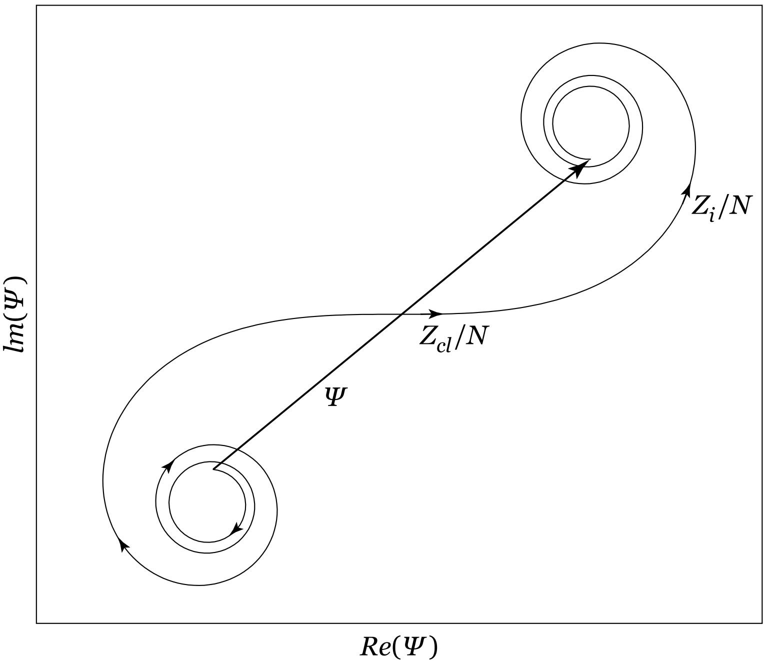
$$\Psi = A\sum_j Z_j = A\sum_j e^{\imath S_j/\hbar} \ , \tag{1.10}$$

όπου j ο δείκτης που καθορίζει την κάθε διαφορετική διαδρομή και A κάποια σταθερά κανονικοποίησης, ώστε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η μετάβαση του σωματιδίου από το αρχικό στο τελικό σημείο μέσω οποιασδήποτε διαδρομής να έχει μέτρο μονάδα.

Τελικά ποια διαδρομή ακολουθεί ένα σωματίδιο;

Για διαδρομές, ωστόσο, για τις οποίες η δράση S μεταβάλλεται πολύ γρήγορα σε σχέση με την ποσότητα $\hbar$, αν παραλλάξουμε λίγο τη διαδρομή, τα μιγαδικά διανύσματα Z_j προστιθέμενα διαγράφουν κύκλους (βλ. Σχήμα 1.7) και το συνολικό τους άθροισμα είναι περίπου μηδενικό. Για τις διαδρομές, όμως, που παρεκκλίνουν ελαφρώς από τη διαδρομή που οδηγεί σε στάσιμη δράση (ας την ονομάσουμε κλασική διαδρομή) τα Z_j είναι σχεδόν ίσα με εκείνο της κλασικής διαδρομής Z_{cl} και επομένως η γωνία μεταξύ αυτών των μιγαδικών διανυσμάτων που αντιστοιχούν σε γειτονικές διαδρομές είναι αμελητέα. Τα αντίστοιχα διανύσματα, όντας σχεδόν συγγραμμικά, δίνουν, αν προστεθούν, ένα *μη* μηδενικό διάνυσμα, οπότε η πιθανότητα να παρατηρήσουμε ένα σωματίδιο που ακολούθησε περίπου την κλασική διαδρομή είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Η κβαντομηχανική, λοιπόν, απάντηση στο ερώτημα αν η αρχή ελάχιστης δράσης είναι απλώς απόρροια του δυναμικού νόμου του Νεύτωνα ή μια βαθύτερη αρχή που καθορίζει τις κινήσεις των σωμάτων, είναι ότι μάλλον πρόκειται για μια βαθύτερη αρχή. Τα σωματίδια, πράγματι, απλώνονται σε όλο το χώρο και δοκιμάζουν κάθε απίθανη διαδρομή, χωρίς όμως να διασπώνται σε μικρό-

[4]Στο σημείο αυτό υπάρχει πλήρης αναλογία με την κυματική περιγραφή του φωτός, σύμφωνα με την οποία το φως μπορεί να περιγραφεί ως μια διαταραχή με μέγεθος ανάλογο της ποσότητας $e^{\imath\int d\phi}$, όπου ϕ η φάση του μετώπου κύματος καθώς αυτό ακολουθεί μια συγκεκριμένη διαδρομή.



Σχήμα 1.7: Ένα ελεύθερο σωματίδιο που ξεκινά από το σημείο (t_1, x_1) και φτάνει στο σημείο (t_2, x_2) περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi = K_N \sum_{j=1}^{N} Z_j$ (μεγάλο βέλος). Ο παράγοντας K_N είναι απλώς μια κατάλληλη πολλαπλασιαστική σταθερά που κανονικοποιεί τις κυματοσυναρτήσεις. Τα μοναδιαία μιγαδικά διανύσματα Z_j αναπαριστούν τις κυματοσυναρτήσεις της εκάστοτε διαδρομής που συνδέει το αρχικό με το τελικό σημείο περνώντας από το ενδιάμεσο σημείο (t_*, x_*), όπου $t_* = (t_1 + t_2)/2$. Θέλοντας να απλοποιήσουμε τα πράγματα θεωρούμε ότι οι διαδρομές που συνδέουν το ενδιάμεσο σημείο με τα ακραία σημεία της διαδρομής αντιστοιχούν σε ομαλές κινήσεις όπως οι διαδρομές τύπου (2) στο Σχήμα 1.2. Για το σχεδιασμό έχουν ληφθεί $N = 500$ ενδιάμεσα x_* με $x_1 \leq x_* \leq x_2$, ενώ οι παράμετροι του προβλήματος έχουν ληφθεί έτσι ώστε $m(x_2-x_1)^2/(t_2-t_1) = 12\pi\hbar$ (σωματίδιο με εξαιρετικά μικρή μάζα). Τα 500 διανύσματα Z_j/N είναι σχεδιασμένα το ένα πίσω από το άλλο σχηματίζοντας τη διπλή αυτή σπείρα. Οι διαδρομές πλησίον της κλασικής διαδρομής (που σχηματίζουν το σχεδόν ευθύγραμμο τμήμα της καμπύλης στο μέσο του διαγράμματος) έχουν $Z_i \approx Z_{cl}$ και κυριαρχούν στον υπολογισμό της Ψ, επειδή τα αντίστοιχα διανύσματα είναι περίπου συγγραμικά, ενώ για τις διαδρομές μακριά από την κλασική τα διανύσματά τους σχηματίζουν κύκλους και έτσι δεν συνεισφέρουν σημαντικά στη συνολική κυματοσυνάρτηση. Αν το σωματίδιο είχε πολύ μεγαλύτερη μάζα (κλασικό σωματίδιο), για παράδειγμα αν η παράμετρος που λάβαμε δεν ήταν 12 αλλά 12×10^{30}, οι περιελίξεις στις δύο σπείρες του σχήματος θα ήταν τόσο πολλές, 10^{30} φορές περισσότερες από όσες είναι τώρα σχεδιασμένες, ώστε το διάνυσμα της συνολικής κυματοσυνάρτησης θα ξεκινούσε και θα κατέληγε στο κέντρο των δύο σπειρών, αφού μόνο το διάνυσμα της κλασικής διαδρομής και τα δύο αμέσως γειτονικά αυτής θα ήταν περίπου συγγραμικά, ενώ όλα τα άλλα θα σχημάτιζαν τόσο μεγάλες γωνίες το καθένα με το επόμενό του ώστε όλα μαζί να αθροίζονται στο μηδέν.

τερα μέρη ! Όταν κάθε σωματίδιο καταφθάνει στο τελικό σημείο παρατήρησης, απλώς συμβάλλει με τον εαυτό του άλλοτε ενισχυτικά (αν ακολούθησε την κλασική διαδρομή) και άλλοτε καταστροφικά (αν ακολούθησε τροχιές που θα οδηγούσαν σε απελπισία και τον ίδιο τον Νεύτωνα). Πώς μπορούμε, όμως, να είμαστε βέβαιοι ότι πράγματι κάτι τέτοιο συμβαίνει; Η βεβαιότητά μας πηγάζει από το γεγονός ότι τα υποατομικά σωματίδια, όταν βρίσκονται εγκλωβισμένα σε κάποιο πηγάδι δυναμικού που κλασικά δεν τους επιτρέπει να δραπετεύσουν από αυτό, καταφέρνουν να δραπετεύσουν, ακολουθώντας προφανώς απαγορευμένες διαδρομές.

Προτού κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο και αρχίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο να μαθαίνουμε πώς να αντιμετωπίζουμε προβλήματα λογισμού μεταβολών, θα αποδείξουμε τη μαθηματική πρόταση που εμφανίστηκε στο πρόβλημα που προσπαθήσαμε να επιλύσουμε. Δηλαδή, αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[A, B]$ και εάν ισχύει

Απόδειξη του θεωρήματος ότι $\int f\eta dx = 0$ για κάθε η συνεπάγεται ότι $f = 0$

$$\int_A^B f(x)\eta(x)dx = 0$$

για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $\eta(x)$ στο ίδιο διάστημα, η οποία συνεπώς δεν μπορεί να απειρίζεται, τότε η $f(x)$ πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει κάποιο σημείο x_0 εντός του διαστήματος $[A, B]$ στο οποίο η $f(x)$ λαμβάνει μη μηδενική τιμή, έστω θετική.[5] Τότε, η $f(x)$, επειδή είναι συνεχής, θα λαμβάνει καθαρά θετικές τιμές και σε μία κλειστή περιοχή $[x_1, x_2]$ γύρω από το σημείο x_0, η οποία περιλαμβάνεται στο διάστημα $[A, B]$. Αν επιλέξουμε τη συνεχή συνάρτηση

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - x_1)(x_2 - x)\ , & \text{για } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0\ , & \text{για } x < x_1 \text{ και } x > x_2\ , \end{cases}$$

τότε, το ολοκλήρωμα της $f(x)\eta(x)$ σε όλο το διάστημα $[A, B]$ είναι

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx$$

που είναι ένας καθαρά θετικός αριθμός δεδομένου ότι η $\eta(x)$ εκ κατασκευής και η $f(x)$ εξ υποθέσεως λαμβάνουν στο διάστημα $[x_1, x_2]$ θετικές τιμές.[6] Καταλήγουμε, λοιπόν, σε άτοπο.

Ένας άλλος, γεωμετρικός αυτή τη φορά, τρόπος να αντιληφθούμε την παραπάνω πρόταση περιγράφεται στη συνέχεια. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

Διανυσματική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος

$$\int_A^B f(x)\eta(x)dx$$

ως ένα εσωτερικό γινόμενο (f, η) μεταξύ των δύο συναρτήσεων (βλ. Μαθηματικό Παράρτημα). Η ποσότητα αυτή έχει όλα τα χαρακτηριστικά ενός εσωτερικού γινομένου: (i) είναι μηδέν, αν η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι η μηδενική, (ii) το εσωτερικό γινόμενο μιας συνάρτησης με τον εαυτό της είναι θετικά ορισμένο και (iii) είναι γραμμικό είτε ως προς την πρώτη είτε ως προς τη δεύτερη συνάρτηση, π.χ. $(\alpha f_1 + \beta f_2, \eta) = \alpha(f_1, \eta) +$

[5] Η απόδειξη είναι ίδια και όταν η f στην περιοχή αυτή λαμβάνει καθαρά αρνητικές τιμές.

[6] Στην απόδειξη υποθέσαμε μόνο τη συνέχεια της $\eta(x)$. Εάν απαιτούνταν επιπλέον η $\eta(x)$ να έχει και τη n-οστή παράγωγό της συνεχή, τότε λαμβάνοντας στο εν λόγω διάστημα την $\eta(x) = (x - x_1)^{n+1}(x_2 - x)^{n+1}$ θα καταλήγαμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι η $f(x)$ πρέπει να είναι ταυτοτικά μηδενική.

$\beta(f_2, \eta)$. Για να είναι, λοιπόν, μηδέν το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος–συνάρτησης f με οποιοδήποτε διάνυσμα-συνάρτηση η, δεν μπορεί παρά το πρώτο διάνυσμα να είναι μηδενικό, αφού μόνο ένα μηδενικό διάνυσμα είναι δυνατό να είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα. Την πρόταση αυτή θα την εφαρμόσουμε σε γενικά προβλήματα μεταβολών σε επόμενα κεφάλαια.

1.2 Προβλήματα

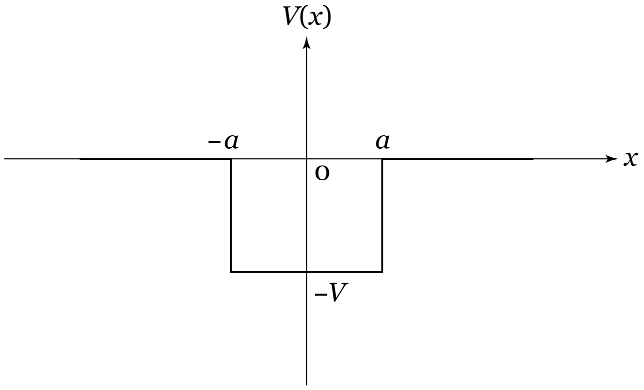
1. Ένας κολυμβητής βρισκόμενος στην παραλία, σε απόσταση α από την ακτή, αντιλαμβάνεται ότι κάποιος λουόμενος, ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση β από την ακτή, κινδυνεύει να πνιγεί. Αν η παράλληλη με την ακτή απόσταση μεταξύ του κολυμβητή και του ανθρώπου που κινδυνεύει είναι γ και η ταχύτητα του κολυμβητή στην αμμουδιά και στη θάλασσα είναι u_1, u_2 αντίστοιχα, βρείτε την συντομότερη σε χρόνο διαδρομή που πρέπει να επιλέξει ο κολυμβητής για να φτάσει τον άνθρωπο που κινδυνεύει. Επιβεβαιώστε ότι για την καλύτερη αυτή διαδρομή ισχύει ο νόμος διάθλασης του Snell
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} ,$$
όπου θ_1, θ_2 είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης, δηλαδή οι γωνίες που σχηματίζουν οι δύο ευθύγραμμες διαδρομές (εκτός και εντός της θάλασσας) με την κάθετη στην ακτογραμμή. Η παραπάνω έκφραση είναι ταυτόσημη με το νόμο της διάθλασης του φωτός (νόμος του Snell), διότι η ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n είναι $u = c/n$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Έτσι, η παραπάνω έκφραση, εφαρμοζόμενη σε μια φωτεινή διαδρομή που αλλάζει οπτικό μέσο δίνει $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.

2. Όταν επιχειρήσαμε να ελαχιστοποιήσουμε τη δράση για μια μπάλα που ανεβαίνει και κατεβαίνει μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης, καταλήγοντας στο αρχικό σημείο μέσα σε χρόνο T, μία από τις οικογένειες διαδρομών που δοκιμάσαμε ήταν της μορφής
$$h(t) \;=\; \frac{4at(T-t)}{T^2} .$$
Αναζητώντας το ελάχιστο της αντίστοιχης δράσης ως προς την ελεύθερη παράμετρο a, καταλήξαμε και στο σωστό ύψος και στη σωστή εξίσωση κίνησης. Σύμφωνα με όσα μάθαμε ως τώρα σχετικά με την κβαντομηχανική θεώρηση των σωματιδίων, αν η δράση μεταβάλλεται ραγδαία συγκριτικά με την κβαντομηχανική ποσότητα $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ Joule $\cdot$ s, τότε, είναι εξαιρετικά απίθανο να πραγματοποιηθεί η αντίστοιχη διαδρομή, με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται. Υπολογίστε τη διαφορά ύψους μεταξύ της κλασικά σωστής διαδρομής και μιας παραπλήσιας με τη σωστή διαδρομής, της παραπάνω μορφής, που διαφοροποιεί τη δράση ακριβώς κατά $\hbar$.

3. Ξεκινώντας από την αρχή ελάχιστης δράσης, καταλήξαμε στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για ένα σωματίδιο που κινείται σε μία διάσταση. Επαναλάβετε τη διαδικασία για ένα σωματίδιο που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο.

4. Υλικό σωματίδιο κινείται σε μία διάσταση μέσα σε πηγάδι δυναμικού που έχει τη μορφή του ακόλουθου σχήματος. Αν η αρχική και η

τελική θέση του σωματιδίου είναι $x(0) = -b < -a$ και $x(T) = b > a$ αντίστοιχα, υπολογίστε τη δράση ως συνάρτηση των χρόνων στους οποίους το σωματίδιο διέρχεται από τα σημεία $-a$ και a. Τι κίνηση εκτελεί το σωματίδιο στα ενδιάμεσα διαστήματα σταθερού δυναμικού ώστε οι επί μέρους δράσεις να είναι ελάχιστες; Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι δύο αυτοί χρόνοι ώστε να ελαχιστοποιείται η ολική δράση; Ποιος είναι ο λόγος των ταχυτήτων του σωματιδίου στα τρία αυτά διαστήματα;



5. Γράψτε την ελάχιστη τιμή της δράσης ενός ελεύθερου σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις ως συνάρτηση της αρχικής και της τελικής θέσης $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ του σωματιδίου και των αντίστοιχων χρόνων t_1, t_2 και επιβεβαιώστε ότι η ορμή και η ενέργεια του σωματιδίου δίνονται από τις σχέσεις
$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{(1)} S = -\vec{\nabla}_{(2)} S \ ,$$
όπου οι δείκτες $_{(1)}$ και $_{(2)}$ αναφέρονται σε παραγωγίσεις ως προς τις αντίστοιχες θέσεις και
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t_2} = \frac{\partial S}{\partial t_1} \ .$$
Δείξτε ακόμη ότι η δράση του ελεύθερου σωματιδίου ικανοποιεί την καλούμενη εξίσωση Hamilton-Jacobi
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} S)^2 = 0 \ .$$

6. Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε μία ευθεία υπό την επήρεια δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή. Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή. Υποθέστε ότι δεν γνωρίζετε την κίνηση που εκτελεί το υλικό σημείο, αλλά έχετε διαπιστώσει ότι η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο T (όχι κατ' ανάγκη ημιτονοειδής). Προσδιορίστε τη φυσική κίνηση, βρίσκοντας για ποια τιμή των παραμέτρων $a_1, a_2, \ldots$ η δράση καθίσταται στάσιμη για διαδρομές της μορφής
$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) \ ,$$
για $0 \le t \le T$, όπου $\omega = 2\pi/T$.

7. Σε έναν κόσμο μονοδιάστατο δύο ίδια σωματίδια αλληλεπιδρούν με δυνάμεις νευτώνειου τύπου, δηλαδή το δυναμικό αλληλεπίδρασής τους έχει τη μορφή $V(x_1 - x_2)$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα σωματίδια βρίσκονται στις θέσεις $x_1(0) = -a, x_2(0) = a$. Ύστερα από χρόνο $t = T$ τα σωματίδια έχουν ανταλλάξει θέσεις και βρίσκονται στις θέσεις $x_1(T) = a, x_2(T) = -a$.
(α) Δείξτε ότι η δράση του συστήματος καθίσταται ελάχιστη, αν σε κάθε χρονική στιγμή είναι
$$x_1(t) = -x_2(t) \ .$$
[Υπόδειξη: Δοκιμάστε διαδρομές όπου $x_1(t) = f(t) + h(t), x_2(t) = -f(t) + h(t)$.]
(β) Σε ποιο συμπέρασμα καταλήγετε σχετικά με την κίνηση του συστήματος στον τρισδιάστατο χώρο x_1, x_2, t; Σχεδιάστε την επιφάνεια επάνω στην οποία κινείται το σύστημα. Ποια πληροφορία αντλούμε από το είδος κίνησης του εν λόγω συστήματος σχετικά με την κίνηση του κέντρου μάζας των σωματιδίων;
(γ) Γράψτε τη δράση των σωματιδίων σε συντεταγμένες κέντρου μάζας $X = (x_1 + x_2)/2$ και σχετικής θέσης $\xi = x_2 - x_1$. Έχετε, ήδη, βρει το ελάχιστο της δράσης ως προς τη συντεταγμένη του κέντρου μάζας. Η ξ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από την τιμή $-2a$ και καταλήγει στην τιμή $+2a$ ύστερα από χρόνο T. Ας θεωρήσουμε τώρα δύο πολύ μικρά χρονικά διαστήματα $(t_A, t_A+\Delta t)$, $(t_B, t_B+\Delta t)$ κατά τα οποία η σχετική θέση είναι αντίστοιχα $\xi_A \cong -\xi_0$ και $\xi_B \cong \xi_0$. Δείξτε ότι, δεδομένου του συνολικού διαστήματος που θα διανυθεί στα δύο αυτά χρονικά διαστήματα $(-\xi_0, -\xi_0+\delta)$, $(\xi_0-\delta, \xi_0)$, η αντίστοιχη δράση καθίσταται ελάχιστη όταν $d\xi/dt|_A = d\xi/dt|_B$. Τι πληροφορία αντλούμε από αυτό το συμπέρασμα όσον αφορά στο χρόνο που χρειάζονται τα δύο σωματίδια για να συγκρουστούν και να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο; Μπορούμε από την ανάλυση της κίνησης να εξαγάγουμε κάποιο συμπέρασμα σχετικά με το αν διατηρείται ή όχι η ενέργεια των σωματιδίων;

8. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μια διάσταση στο εσωτερικό ενός πηγαδιού δυναμικού με αδιαπέραστα τοιχώματα (φρέαρ δυναμικού απείρου βάθους). Το εύρος του πηγαδιού είναι L. (α) Δείξτε, με εφαρμογή την αρχή του Χάμιλτον, ότι η κίνηση του σωματιδίου από το ένα άκρο του πηγαδιού στο άλλο σε συνολικό χρόνο T επιτυγχάνεται με ομαλή κίνηση. (β) Δεδομένου, λοιπόν, ότι οι δύο κινήσεις, από το αριστερό άκρο στο δεξιό και πάλι πίσω στο αριστερό, είναι ομαλές, δείξτε ότι είναι επιπλέον και ισόχρονες $T_{\rightarrow} = T_{\leftarrow}$, και πάλι ως συνέπεια της αρχής ελάχιστης δράσης. (γ) Αν για κάποιο λόγο η δράση κάθε σωματιδίου που κινείται κατά μήκος μιας τέτοιας κλειστής διαδρομής εύρους L οφείλει να είναι κβαντισμένη, δηλαδή $S = n\pi\hbar$ όπου n ένας ακέραιος αριθμός και $\hbar$ μια συγκεκριμένη μονάδα δράσης, δείξτε ότι η ενέργεια του σωματιδίου οφείλει και αυτή να είναι κβαντισμένη και μάλιστα οι επιτρεπτές ενέργειες

είναι τότε ανάλογες του n^2. Αντιπαραβάλετε το διακριτό ενεργειακό φάσμα που βρήκατε με το κβαντομηχανικό ανάλογο του, ψάχνοντας σε ένα οποιοδήποτε εισαγωγικό βιβλίο κβαντομηχανικής. Με την κβαντική υπόθεση που θεωρήσαμε οδηγηθήκαμε ακριβώς στο ενεργειακό φάσμα του αντίστοιχου κβαντομηχανικού προβλήματος !

9. Η δράση κάποιας διαδρομής $x(t)$ ενός αρμονικού ταλαντωτή που συνδέει τα σημεία $x(0) = a$ και $x(T) = b$ είναι

$$S[x] = \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)\, dt \, .$$

Δείξτε με κατευθείαν αντικατάσταση ότι η τροχιά:

$$x_c(t) = \frac{1}{\sin \omega T}\left[a \sin(\omega(T-t)) + b \sin \omega t\right] \, ,$$

καθιστά τη δράση στάσιμη για μεταβολές της τροχιάς, $\eta(t)$, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Με ολοκλήρωση κατά μέρη και με χρήση της εξίσωσης κίνησης του ταλαντωτή δείξτε ότι η συνολική δράση που αντιστοιχεί στην κλασική τροχιά είναι:

$$S[x_c] = \frac{x_c(T)\dot{x}_c(T) - x_c(0)\dot{x}_c(0)}{2} \, .$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι:

$$S[x_c] = \frac{\omega}{2 \sin \omega T}\Big((a^2 + b^2)\cos \omega T - 2ab\Big) \, .$$

Γιατί απειρείζεται δράση όταν ο συνολικός χρόνος κίνησης T λάβει την τιμή $T = \pi/\omega$;