ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική Ι

16 Φεβρουαρίου 2006

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 3 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (40 μονάδες) Απαντήστε με συντομία στα ακόλουθα ερωτήματα. Όπου αναφέρονται, το $\hat{k}$ είναι κάποιο μοναδιαίο σταθερό διάνυσμα, ενώ το $\vec{v}$ παριστάνει την ταχύτητα κάποιου σωματιδίου.

1. Σε αρχικά ακίνητο σωματίδιο μάζας $m = 1$ ασκείται δύναμη $F(t) = (1+t)\delta(t)$. Ποια η $v(t = 1)$;

2. Ποια δύναμη ασκείται στη θέση $\vec{x}$ αν το δυναμικό είναι $\hat{k} \cdot \vec{x}$;

3. Ποια δύναμη ασκείται στη θέση $\vec{x}$ αν το δυναμικό στη θέση $\vec{x}$ είναι $V(\vec{x}) = |\vec{x}|$;

4. Πόσο έργο εκτελεί η δύναμη $\vec{F} = \hat{k} \times \vec{x}$ κατά μήκος μιας κυκλικής τροχιά ακτίνας R στο επίπεδο το κάθετο στο $\hat{k}$;

5. Εάν σωματίδιο κινούνταν υπό την επίδραση της παραπάνω δύναμης θα υπήρχε η διατηρούμενη ποσότητα της ενέργειας; Εάν ναι ποια είναι αυτή, αν όχι γιατί;

6. Σε σωματίδιο ασκείται η δύναμη $\vec{F} = \hat{k} \times \vec{v}$. Υπάρχει η διατηρούμενη ποσότητα της ενέργειας; Εάν ναι ποία είναι αυτή, αν όχι γιατί;

7. Για το προηγούμενο ερώτημα σχεδιάστε την οδογράφο.

8. (Για το ερώτημα 6 πάλι.) Υπολογίστε ως έκφραση της θέσης και της ταχύτητας το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σωματιδίου. Ποια συνιστώσα της στροφορμής διατηρείται; Γιατί;

9. Σε σωματίδιο μάζας m ασκείται η δύναμη $-m\omega^2\vec{x}$, όπου $\vec{x}$ η θέση του. Αν είναι $\vec{x}(0) = \vec{0}$ και $\vec{v}(0) = \hat{k}$ προσδιορίστε την τροχιά του σωματιδίου. Ποια η στροφορμή του ως προς το $\vec{x}_0 = \vec{0}$;

10. Δύο σωματίδια μάζας $m = 1$ έλκονται με δύναμη μέτρου $|\vec{x}|$ (όπου $\vec{x}$ η σχετική θέση τους). Στο **ένα μόνο** ασκείται η δύναμη $\hat{k}\cos\omega t$. Αρχικά το κέντρο μάζας τους ήταν ακίνητο στο $\vec{X}(0) = 0$. Πόσο είναι το $\vec{X}(t)$; Για ποιο ω θα είναι $\lim_{t\to\infty} |\vec{x}(t)| = \infty$;

ΘΕΜΑ Β (30 μονάδες) Υποθέτουμε ότι κάθε σώμα μάζας M που καταλαμβάνει όγκο V και είναι συμμετρικό γύρω προς τον άξονα z προκαλεί σε απόσταση R από το κέντρο μάζας του βαρυτικό δυναμικό:

$$\phi = -\frac{GM}{R} - \frac{GQ}{4R^5}\left(2z^2 - \rho^2\right) \ ,$$

όπου (ρ, θ, z) οι κυλινδρο-πολικές συντεταγμένες του εν λόγω σημείου ($R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$) από το κέντρο μάζας του σώματος. Η ποσότητα $Q \equiv \int_V \varrho(\rho, z)(2z^2 - \rho^2)dV$ είναι η τετραπολική ροπή και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στον όγκο του σώματος. Θεωρήστε τώρα ένα σφαιρικό πλανήτη (π.χ. ο Κρόνος) μάζας m_0 σταθερής πυκνότητας ϱ που περιβάλλεται από ένα κυκλικό δακτύλιο ακτίνας a και μηδενικού πλάτους που κείται στο ισημερινό επίπεδο του πλανήτη ($z = 0$). Η πυκνότητα του δακτυλίου είναι $\varrho(\rho, z) = m_1\delta(\rho - a)\delta(z)/(2\pi a)$ όπου ρ είναι η απόσταση από τον άξονα z έτσι ώστε το ολοκλήρωμα σε όλο τον χώρο της πυκνότητας αυτής να δίνει τη μάζα του δακτυλίου, δηλαδή:

$$\frac{m_1}{2\pi a}\int_0^\infty d\rho\, \rho\delta(\rho - a)\int_0^{2\pi} d\theta\ \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(z) = m_1$$

Σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες το στοιχείο όγκου, που χρησιμοποιήσαμε, είναι $dV = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$.

1. Υπολογίστε το Q του πλανήτη και του δακτυλίου. Δείξτε στη συνέχεια ότι στο επίπεδο του ισημερινού ($z = 0$) και σε απόσταση $R = r$ από το κέντρο του πλανήτη το δυναμικό που προκαλείται από τον πλανήτη και το δακτύλιο είναι:
$$\phi = -\frac{GM}{r} - \frac{Gm_1 a^2}{4r^3} ,$$
όπου $M = m_0 + m_1$ η συνολική μάζα πλανήτη και δακτυλίου.

2. Θεωρήστε ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας που βρίσκεται αρχικά στο επίπεδο του ισημερινού και έχει ταχύτητα που και αυτή είναι στο επίπεδο του ισημερινού. Θα συνεχίσει αυτό να κινείται στο επίπεδο του ισημερινού; Διατηρείται η στροφορμή του;

3. Γράψτε το ενεργό δυναμικό. Δείξτε ότι αν για L στροφορμή του σωματιδίου ισχύει ότι
$$\frac{L^2}{GM} < \sqrt{\frac{3m_1}{M}}a$$
το σωματίδιο **δεν** μπορεί να εκτελέσει κυκλικές κινήσεις και αν είναι δέσμιο θα πέσει αναγκαστικά στον πλανήτη. Δείξτε ότι αν δεν ισχύει η ανισότητα, τότε υπάρχουν δύο επιτρεπτές κυκλικές τροχιές. Στην περίπτωση αυτή προσδιορίστε προσεγγιστικά τις ακτίνες των κυκλικών τροχιών υποθέτοντας ότι $(m_1/M)[a^2/(L^2/GM)^2] << 1$. Τι θα συμβεί αν διαταραχθεί λίγο, χωρίς αλλαγή της στροφορμής καθεμιά από τις κυκλικές τροχιές;

ΘΕΜΑ Γ (30 μονάδες) Έστω δύο ακλόνητες ομοαξονικές κυκλικές στεφάνες με ακτίνες α και β. Σε κάθε μία στεφάνη κινείται χωρίς τριβή και μία σημειακή χάντρα. Στην πρώτη, η χάντρα έχει μάζα m_1 ενώ στη δεύτερη η χάντρα έχει μάζα m_2. Η πρώτη στεφάνη βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ και το κέντρο της στεφάνης είναι στο σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $(0, 0, 0)$ ενώ η δεύτερη στεφάνη είναι στο επίπεδο $z = \gamma$ και το κέντρο της στο σημείο $(0, 0, \gamma)$. Οι χάντρες έλκονται με νευτώνειου τύπου δύναμη μέτρου kl όπου l η σχετική απόσταση των χαντρών. Επειδή οι χάντρες κινούνται άνευ τριβής η αντίδραση της κάθε στεφάνης σε κάθε χάντρα είναι σε διεύθυνση κάθετη στη στεφάνη.

1. Θεωρήστε δύο ζεύγη πολικών συντεταγμένων στο επίπεδο της κάθε στεφάνης έτσι ώστε η θέση της m_1 στο επίπεδο $z = 0$ να είναι (α, θ_1) ενώ η θέση της m_2 στο επίπεδο $z = \gamma$ να είναι (β, θ_2). Ορίστε επίσης τα μοναδιαία ακτινικά διανύσματα $\hat{r}_i$ και τα μοναδιαία γωνιακά διανύσματα $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2$, στο επίπεδο της κάθε στεφάνης που είναι κάθετα στα αντίστοιχα ακτινικά και στο μοναδιαίο διάνυσμα στην κατακόρυφη δεύθυνση $\hat{z}$. Γράψτε τη διανυσματική έκφραση της δύναμης με την οποία αλληλεπιδρούν οι δύο χάντρες όταν βρίσκονται σε κάποια τυχαία θέση συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων που έχετε ορίσει.

2. Γράψτε τις διανυσματικές δυναμικές εξισώσεις κίνησης κάθε σωματιδίου στη μορφή $m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \ldots$ όπου $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης της $i = 1, 2$ χάντρας. Γράψτε την επιτάχυνση κάθε χάντρας στις αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες.

3. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο των εξισώσεων αυτών με τα αντίστοιχα $\hat{\theta}_i$ δείξτε ότι οι γωνιακές θέσεις θ_i ικανοποιούν τις εξισώσεις: $m_1\alpha\ddot{\theta}_1 = k\beta \sin(\theta_2 - \theta_1)$, $m_2\beta\ddot{\theta}_2 = -k\alpha \sin(\theta_2 - \theta_1)$, στις οποίες έχουν πλέον εξαφανιστεί οι αντιδράσεις.

4. Γράψτε τις εξισώσεις εξέλιξης στο σύστημα "κέντρου μάζας" $\Theta \equiv \frac{m_1\alpha^2\theta_1 + m_2\beta^2\theta_2}{m_1\alpha^2 + m_2\beta^2}$ και σχετικής γωνίας $\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$. Ποια είναι η ανηγμένη μάζα σε αυτή τη περίπτωση;

5. Δείξτε ότι η $d\Theta/dt$ είναι σταθερή κατά την κίνηση, δηλαδή διατηρείται. Ποια η φυσική ερμηνεία αυτή της διατηρούμενης ποσότητας; Γιατί αναμένατε τη διατήρησή της;

6. Θεωρήστε τώρα ότι $\Theta(t) = 0$. Προσδιορίστε τις δυνατές καταστάσεις ισορροπίας των δύο χαντρών και την ευστάθειά τους κατασκευάζοντας τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις που διέπουν μικρές κινήσεις των χαντρών περί τα σημεία ισορροπίας τους.

Λύσεις

A)

1. Η δύναμη δίνει για $t > 0$ παραπάνω ορμή $\int (1+t)\delta(t)dt = 1$, άρα $v(1) = 1$.

2. Η δύναμη είναι $\vec{F} = -\vec{k}$ διότι:

$$F_i = -\frac{\partial(k_j x_j)}{\partial x_i} = -k_j \delta_{ij} = -k_i \ .$$

3. Η δύναμη είναι ελκτική και μοναδιαία στη διεύθυνση του ακτινικού διανύσματος $\vec{F} = -\vec{x}/r$ διότι:

$$F_i = -\frac{\partial(x_j x_j)^{1/2}}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r} \ .$$

4. Το έργο της δύναμης είναι

$$\int_0^{2\pi} (\vec{k} \times \vec{x}) \cdot \vec{e}_\theta R d\theta = 2\pi R^2 \ .$$

5. Το έργο δηλαδή σε μια κλειστή τροχιά δεν είναι μηδενικό οπότε η δύναμη δεν είναι συντηρητική και συνεπώς δεν υπάρχει ενέργεια.

6. Το έργο της δύναμης είναι τώρα μηδενικό διότι

$$\int (\vec{k} \times \vec{v}) \cdot d\vec{x} = \int (\vec{k} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

οπότε η κινητική ενέργεια $m|\vec{v}|^2/2$ διατηρείται.

7. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{k} \times \vec{v} \ ,$$

οπότε το διάνυσμα της ταχύτητας έχει σταθερό μέτρο και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα $\vec{k}$ και η οδογράφος θα είναι κύκλος που είναι κάθετος στο διάνυσμα $\vec{k}$.

8. Για να γράψουμε την εξίσωση εξέλιξης της στροφορμής πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση κίνηση εξωτερικά με το διάνυσμα της θέσης $\vec{x}$, δεδομένου ότι η στροφορμή είναι $\vec{L} = m\vec{x} \times \vec{v}$:

$$\begin{aligned} m\vec{x} \times \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ &= \vec{x} \times (\vec{k} \times \vec{v}) \ . \end{aligned}$$

Αμέσως φαίνεται ότι η συνιστώσα στην διεύθυνση $\vec{k}$ που είναι $\vec{L} \cdot \vec{k}$ διατηρείται διότι δεν υπάρχει ροπή στην αζιμουθειακή διεύθυνση.

9. Η λύση με αυτές τις αρχικές τιμές είναι

$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \sin \omega t \ ,$$

Η στροφορμή διατηρείται. Αρχικά η στροφορμή ήταν μηδενική οπότε η στροφορμή είναι μηδενική. Η τροχιά του σωματιδίου είναι μία ευθεία γραμμη στη διεύθυνση $\vec{k}$ πλάτους $1/\omega$.

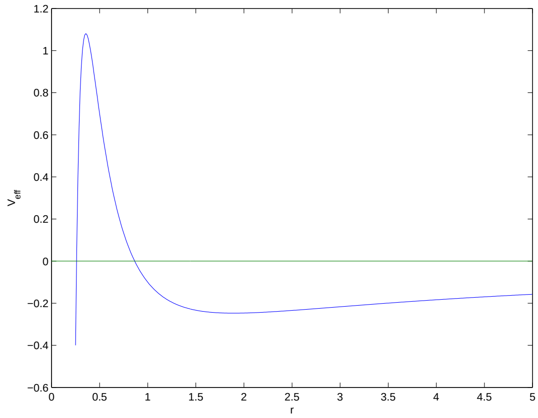
10. Το κέντρο μάζας θα εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση
$$2\ddot{\vec{X}} = \vec{k}\sin\omega t$$
οπότε
$$\vec{X}(t) = -\frac{\vec{k}}{2\omega^2}\sin\omega t$$
Η ανηγμένη μάζα είναι $\mu = 1/2$, οπότε η εξίσωση σχετικής κίνησης θα είναι μία εξαναγκασμένη ταλάντωση:
$$\mu\ddot{\vec{x}} + \vec{x} = \pm\vec{k}\sin\omega t \ .$$
Συντονισμός προκύπτει όταν $\omega = \sqrt{1/\mu} = \sqrt{2}$.

B)

1. Για τον σφαιρικό και ομογενή πλανήτη $Q = 0$ διότι $\int z^2 dV = \int x^2 dV = \int y^2 dV$ οπότε $\int 2z^2 dV = \int (x^2+y^2) dV$. Συνεπώς το δυναμικό σε απόσταση r από το κέντρο του πλανήτη στο επίπεδο του ισημερινού ($z = 0$) είναι:
$$\phi_p = -\frac{Gm_1}{r} \ .$$
Το Q του δακτυλίου είναι
$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \frac{m}{2\pi a}(2z^2 - r^2)\delta(r-a)\delta(z) \\ &= -\int_0^\infty dr\ \frac{m}{a}\ r^3\delta(r-a) \\ &= -ma^2 \ , \end{aligned}$$
και το δυναμικό από τον δακτύλιο σε απόσταση r από το κέντρο μάζας του δακτυλίου (που συμπίπτει με το κέντρο του πλανήτη) στο επίπεδο του ισημερινού ($z = 0$) είναι:
$$\phi_d = -\frac{Gm}{r} - \frac{Gma^2}{4r^3} \ .$$
Το συνολικό δυναμικό από πλανήτη και τον δακτύλιο είναι:
$$\phi = \phi_p + \phi_d = -\frac{GM}{r} - \frac{Gma^2}{4r^3} \ ,$$
όπου $M = m_1 + m$.

2. Η δύναμη που ασκείται σε σωματίδιο που κείται στο επίπεδο του ισημερινού είναι ακτινική οπότε η στροφορμή του σωματιδίου διατηρείται. Το σωματίδιο θα κινείται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα της στροφορμής, (η οποία έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του ισημερινού), άρα το σωματίδιο θα παραμείνει στο επίπεδο του ισημερινού.

3. Η στροφορμή ανά μονάδα μάζας είναι $L = r^2\dot{\theta}$, οπότε το ενεργό δυναμικό είναι:
$$V_{eff} = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{Gma^2}{4r^3} \ .$$
Τα μέγιστα είναι στις ακτίνες:
$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} + \frac{3Gma^2}{4r^4} \ .$$



Σχήμα 1: Το ενεργό δυναμικό που επιτρέπει δύο κυκλικές τροχιές.

δηλαδή στις ακτίνες που ικανοποιούν την

$$r^2 - \frac{L^2}{GM} r + \frac{3ma^2}{4M} = 0 ,$$

δηλαδή στις ακτίνες

$$r_c = \frac{L^2}{2GM} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{L^2}{GM}\right)^2 - 3a^2 \frac{m}{M}} .$$

Στάσιμες ακτίνες υπάρχουν στο ενεργό δυναμικό μόνο αν

$$\frac{L^2}{GM} > \sqrt{\frac{3m}{M}} a .$$

Οι στάσιμες ακτίνες είναι οι ακτίνες που αν το σωματίδιο έχει κατάλληλη ενέργεια εκτελεί κυκλικές κινήσεις. Η γραφική παράσταση του δυναμικού φαίνεται στη περίπτωση αυτή στο σχήμα. Βλέπετε ότι αν δεν υπήρχε ο δακτύλιος τότε θα μπορούσε να εκτελέσει κυκλική κίνηση με ακτίνα L^2/GM. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν στάσιμες τιμές το ενεργό δυναμικό είναι φθίνουσα συνάρτηση και για οποιαδήποτε ενέργεια το σωματίδιο θα προσπέσει στον πλανήτη. Αν υπάρχουν στάσιμα σημεία (η στροφορμή είναι αρκετά μεγάλη) τότε οι ακτίνες κυκλικής κίνησης υπό τη προϋπόθεση ότι $(m/M)(a^2/(L^2/GM)^2) << 1$ και λαμβάνοντας τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα είναι

$$r_1 = \frac{L^2}{GM} - \frac{3}{2} \frac{m}{M} \frac{a^2}{L^2/(GM)} ,$$

που είναι λίγο μικρότερη από την ακτίνα κυκλικής κίνησης αν δεν υπήρχε ο δακτύλιος η οποία είναι ευσταθής και μία εσωτερική ακτίνα

$$r_2 = \frac{3}{2} \frac{m}{M} \frac{a^2}{L^2/(GM)} ,$$

η οποία είναι ασταθής. Αν διαταχθεί αυτή η κίνηση το σωματίδιο θα προσπέσει στον πλανήτη (αν βέβαια η ακτίνα αυτή είναι εκτός του πλανήτη) ή το σωματίδιο θα εκτελέσει ελλεπτικές τροχιές, οι οποίες όμως δεν κλίνουν.

Γ) Η θέση της πρώτης χάντρας είναι

$$\vec{r_1} = \alpha \hat{r}_1 ,$$

και της δευτέρης

$$\vec{r_2} = \beta \hat{r}_2 + \gamma \hat{z} .$$

οπότε η δύναμη που ασκείται στη πρώτη χάντρα από τη δεύτερη είναι

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= k\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \\ &= k\left(\beta\hat{r}_2 - \alpha\hat{r}_1 + \gamma\hat{z}\right) \ ,\end{aligned}$$

και

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \ .$$

Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{aligned}m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= k\left(\beta\hat{r}_2 - \alpha\hat{r}_1 + \gamma\hat{z}\right) + \vec{T}_1 \ , \\ m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= -k\left(\beta\hat{r}_2 - \alpha\hat{r}_1 + \gamma\hat{z}\right) + \vec{T}_2 \ ,\end{aligned}$$

όπου $\vec{T}_1$ η αντίδραση της στεφάνης στη πρώτη χάντρα και $\vec{T}_2$ η αντίδραση της στεφάνης στη δεύτερη χάντρα.

Είναι τώρα

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= \alpha\ddot{\theta}_1\,\hat{\theta}_1 - \alpha\dot{\theta}_1^2\,\hat{r}_1 \ , \\ \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= \beta\ddot{\theta}_2\,\hat{\theta}_2 - \beta\dot{\theta}_2^2\,\hat{r}_2\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με τα αντίστοιχα γωνιακά διανύσματα έχουμε:

$$\begin{aligned}m_1\alpha\ddot{\theta}_1 &= k\left(\beta\,\hat{r}_2\cdot\hat{\theta}_1 - \alpha\,\hat{r}_1\cdot\hat{\theta}_1 + \gamma\hat{z}\cdot\hat{\theta}_1\right) + \vec{T}_1\cdot\hat{\theta}_1 \\ &= k\beta\,\hat{r}_2\cdot\hat{\theta}_1\end{aligned}$$

επειδή η αντίδραση είναι κάθετη στη στεφάνη και συνεπώς $\vec{T}_1\cdot\hat{\theta}_1 = 0$. Παρομοίως:

$$\begin{aligned}m_2\beta\ddot{\theta}_2 &= -k\left(\beta\,\hat{r}_2\cdot\hat{\theta}_2 - \alpha\,\hat{r}_1\cdot\hat{\theta}_2 + \gamma\hat{z}\cdot\hat{\theta}_2\right) + \vec{T}_1\cdot\hat{\theta}_2 \\ &= k\alpha\,\hat{r}_1\cdot\hat{\theta}_2 \ .\end{aligned}$$

Ως προς τα καρτεσιανά μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}$ και $\hat{y}$ είναι:

$$\hat{r}_i = \cos\theta_i\,\hat{x} + \sin\theta_i\,\hat{y} \ \ , \ \ \hat{\theta}_i = -\sin\theta_i\,\hat{x} + \cos\theta_i\hat{y}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\hat{r}_2\cdot\hat{\theta}_1 &= -\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ &= \sin(\theta_2 - \theta_1) \ ,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\hat{r}_1\cdot\hat{\theta}_2 &= -\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ &= \sin(\theta_1 - \theta_2) \ .\end{aligned}$$

Καταλήγουμε τελικά στις εξισώσεις:

$$m_1\alpha^2\ddot{\theta}_1 = k\alpha\beta\sin(\theta_2 - \theta_1) \ \ , \ \ m_2\beta^2\ddot{\theta}_2 = -k\alpha\beta\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Κατ᾽ αναλογία με το πρόβλημα των δύο σωμάτων ορίζουμε την ανηγμένη μάζα

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1 a^2} + \frac{1}{m_2\beta^2}$$

οπότε οι εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$\ddot{\Theta} = 0 \ \ , \ \ \mu\ddot{\theta} + k\alpha\beta \sin\theta = 0 \ \ .$$

Η πρώτη οδηγεί σε ομαλή κυκλική κίνηση του κέντρου "μάζας", η δε δεύτερη ορίζει ως σημεία ισορροπίας τα $\theta = 0, \pi$. Πλησίον του $\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{k\alpha\beta}{\mu}\theta = 0 \ \ .$$

έχουμε ταλαντωτικές λύσεις με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k\alpha\beta}{\mu}}$, οπότε το σημείο αυτό είναι ευσταθές. Μικρές κινήσεις περί το $\theta = \pi$ διέπονται από την εξίσωση

$$\ddot{\theta} - \frac{k\alpha\beta}{\mu}\theta = 0 \ \ .$$

η οποία έχει εκθετικές λύσεις με συντελεστή αύξησης τον $\lambda = \sqrt{\frac{k\alpha\beta}{\mu}}$, οπότε το σημείο αυτό ισορροπίας είναι ασταθές.